Problema 540 de *triánguloscabri*. *Resolver y construir el triángulo rectángulo ABC, $A = 90°$ conocidos c, $a + b$. Como ampliación, resolver y construir el triángulo rectángulo ABC, $A = 90°$ conocidos c, $a - b$.*

Sánchez-Rubio, C., Ripollés, M. (2000). Manual de Matemáticas para Preparación Olímpica. Problema 8 (pág. 339).

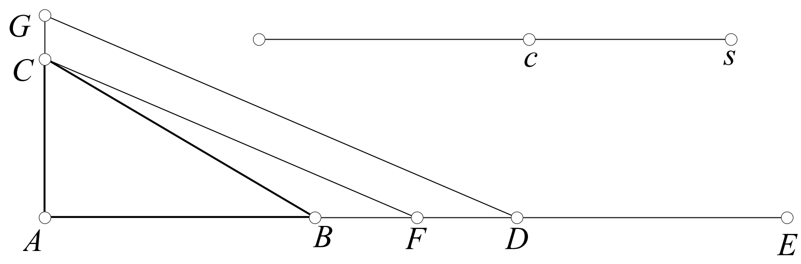
Propuesto por Ricard Peiró.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Llamemos $s = a + b$. Entonces, de $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (s - b)^2 = b^2 + c^2$ obtenemos que

$$b = \frac{s^2 - c^2}{2s} = \frac{\frac{s+c}{2} \cdot (s - c)}{s},$$

que motiva la siguiente construcción:



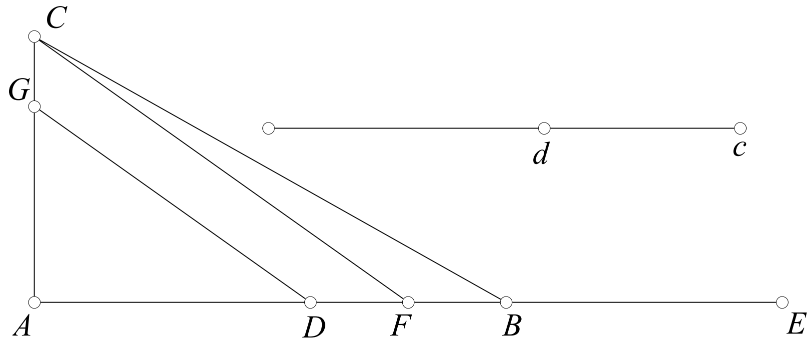
Sobre una recta marcamos los puntos A, B, D, E tales que $AB = c$, $AD = s$, $DE = c$. Hallamos el punto medio F de AE, que cumple $AF = \frac{1}{2}(s + c)$. Por A levantamos una perpendicular $AG = s - c$. Unimos GD y trazamos una paralela a GD por F, que corta en C a AG. Entonces, ABC es el triángulo buscado, ya que tenemos

$$AC = AG \cdot \frac{AF}{AD} = (s - c) \cdot \frac{\frac{1}{2}(s + c)}{s} = b.$$

Si conocemos c y $d = a - b$, entonces $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (d + b)^2 = b^2 + c^2$, es decir,

$$b = \frac{c^2 - d^2}{2d} = \frac{\frac{c+d}{2} \cdot (c - d)}{d},$$

que es, esencialmente la misma fórmula que antes, y por tanto será válida la misma construcción.



Ahora, sobre una recta marcamos los puntos A, B, D, E tales que $AB = c$, $AD = d$, $DE = c$. Hallamos el punto medio F de AE, que cumple $AF = \frac{1}{2}(d + c)$. Por A levantamos una perpendicular $AG = c - d$. Unimos GD y trazamos una paralela a GD por F, que corta en C a AG. Entonces, ABC es el triángulo buscado, ya que tenemos

$$AC = AG \cdot \frac{AF}{AD} = (c - d) \cdot \frac{\frac{1}{2}(c + d)}{d} = b.$$