

Problema 540

- a) Resoleu i construïu el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ coneguts $c, a + b$.
- b) Resoleu i construïu el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ coneguts $c, a - b$.

Solució a):

Suposem que $a + b > c$ en cas contrari el problema no té solució.

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Aplicant el teorema de Pitàgores.

$$(a + b)^2 = c^2 + 2b^2 + 2b\sqrt{b^2 + c^2}.$$

$$2b\sqrt{b^2 + c^2} = (a + b)^2 - c^2 - 2b^2. \text{ Elevant al quadrat i simplificant:}$$

$$-4b^2(a + b)^2 + (a + b)^4 + c^4 - 2c^2(a + b)^2 = 0.$$

$$4(a + b)^2 b^2 = ((a + b)^2 - c^2)^2.$$

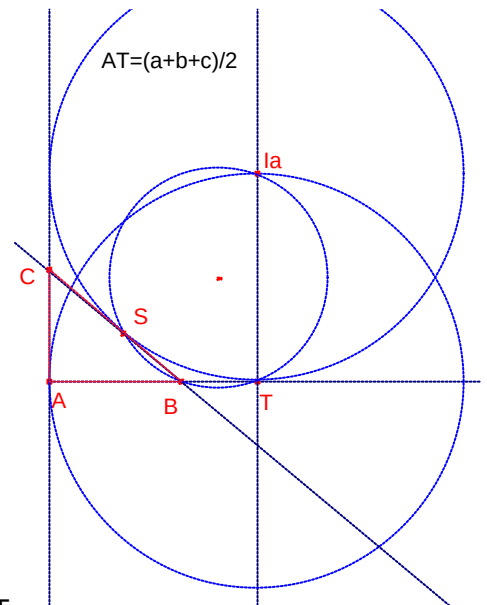
$$b = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2(a + b)}.$$

$$a = (a + b) - b = \frac{(a + b)^2 + c^2}{2(a + b)}, \text{ notem que } b < a.$$

Construcció 1:

Propietat de la circumferència exinscrita al triangle rectangle.

El radi de la circumferència exinscrita al triangle rectangle referida a l'angle recte és igual al semiperímetre.



a) Dibuixar la semirecta s d'origen A.

b) Dibuixar el segment $\overline{AB} = c$, $\overline{AT} = \frac{a + b + c}{2}$ sobre la

semirecta s.

c) Dibuixar la recta r perpendicular a la semirecta s pel punt T.

d) Dibuixar la circumferència de centre T que passa per A que talla la recta r en el punt I_a centre de la circumferència exinscrita.

e) Dibuixar la circumferència exinscrita al triangle (circumferència de centre I_a que passa pel punt T.

f) Dibuixar la recta t tangent a la circumferència exinscrita.

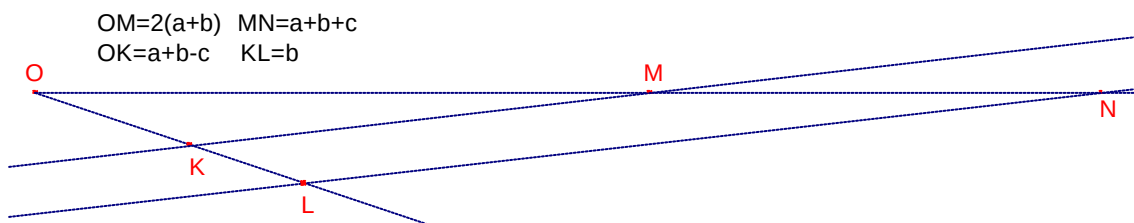
g) Dibuixar la recta u perpendicular a la semirecta s que passa pel punt A, que talla la recta t en el punt C.

h) Dibuixar el triangle $\triangle ABC$.

Construcció 2:

$$b = \frac{(a + b)^2 - c^2}{2(a + b)}, \quad b = \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2(a + b)}, \quad \frac{a + b + c}{b} = \frac{2(a + b)}{a + b - c}$$

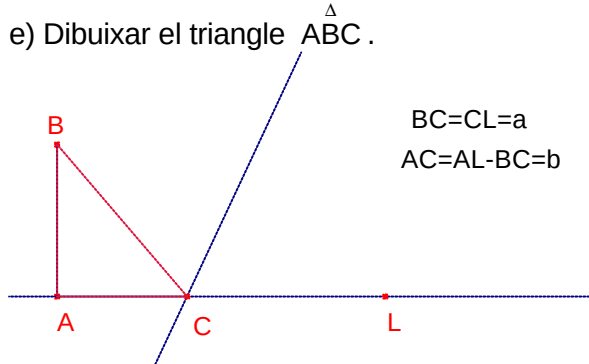
Notem que b és una quarta proporcional dels segments $a + b + c$, $2(a + b)$, $a + b - c$.



Una vegada conegut b. Dibuixar el triangle rectangle de catets b, c.

Construcció 3 (Carlos Benlloch)

- Dibuixar el segment $\overline{AB} = c$.
- Dibuixar la recta r perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa pel punt A.
- Dibuixar el segment $\overline{AL} = a + b$ sobre la recta r .
- Dibuixar la mediatriu del segment $\overline{BL}$ que talla la recta r en el punt C.
- Dibuixar el triangle $\triangle ABC$.



Resoleu i construïu el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ coneguts $c, a - b$.

Solució b):

Suposem que $a - b < c$ en cas contrari el problema no té solució.

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Aplicant el teorema de Pitàgores.

$$(a - b)^2 = c^2 + 2b^2 - 2b\sqrt{b^2 + c^2}.$$

$$2b\sqrt{b^2 + c^2} = -(a - b)^2 + c^2 + 2b^2. \text{ Elevant al quadrat i simplificant:}$$

$$4b^2(a - b)^2 = (a - b)^4 + c^4 - 2c^2(a - b)^2.$$

$$4(a - b)^2 b^2 = \left(-(a - b)^2 + c^2 \right)^2.$$

$$b = \frac{-(a - b)^2 + c^2}{2(a - b)}.$$

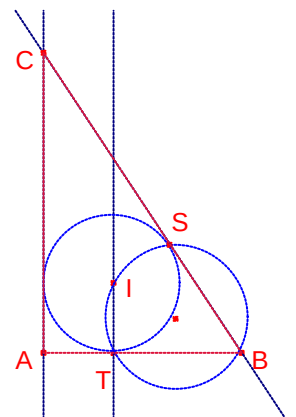
$$a = (a - b) + b = \frac{(a - b)^2 + c^2}{2(a - b)}, \text{ notem que } b < a.$$

Construcció 1:

Propietat de la circumferència inscrita al triangle rectangle.

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle referida a l'angle recte és igual al semiperímetre menys la hipotenusa.

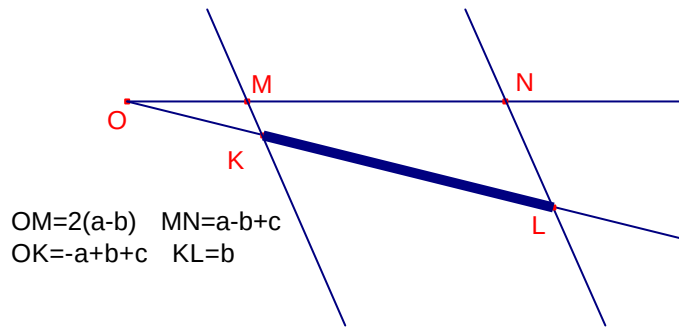
- Dibuixar la semirecta s d'origen A.
- Dibuixar el segment $\overline{AB} = c$, $\overline{AT} = \frac{-a + b + c}{2}$ sobre la semirecta s .
- Dibuixar la recta r perpendicular a la semirecta s pel punt T.
- Dibuixar la circumferència de centre T que passa per A que talla la recta r en el punt I centre de la circumferència inscrita.
- Dibuixar la circumferència inscrita al triangle (circumferència de centre I que passa pel punt T).
- Dibuixar la recta t tangent a la circumferència inscrita.
- Dibuixar la recta u perpendicular a la semirecta s que passa pel punt A, que talla la recta t en el punt C.
- Dibuixar el triangle $\triangle ABC$.



Construcció 2:

$$b = \frac{-(a-b)^2 + c^2}{2(a-b)}, \quad b = \frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2(a-b)}, \quad \frac{a-b+c}{b} = \frac{2(a-b)}{-a+b+c}$$

Notem que b és una quarta proporcional dels segments $a+b-c$, $2(a-b)$, $-a+b+c$.



Una vegada conegut b . Dibuixar el triangle rectangle de catets b , c .

Construcció 3 (Carlos Benlloch)

- Dibuixar el segment $\overline{AB} = c$.
- Dibuixar la recta r perpendicular al segment $\overline{AB}$ que passa pel punt A.
- Dibuixar el segment $\overline{AL} = a - b$ sobre la recta r .
- Dibuixar la mediatriu del segment $\overline{BL}$ que talla la recta r en el punt C.
- Dibuixar el triangle $\triangle ABC$.

