Problema 540

a) Resolver y construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$ conocidos $c, a+b$.

b) Resolver y construir el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$ conocidos $c, a-b$.

Solución a):

Supongamos que $a+b>c$ en caso contrario el problema no tiene solución.

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Aplicando el teorema de Pitágoras.

$(a+b)^2 = c^2 + 2b^2 + 2b\sqrt{b^2+c^2}$.

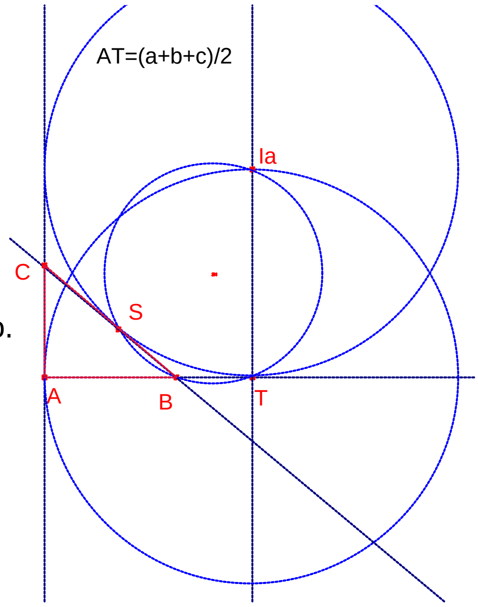
$2b\sqrt{b^2+c^2} = (a+b)^2 - c^2 - 2b^2$. Elevando al cuadrado y simplificando:

$-4b^2(a+b)^2 + (a+b)^4 + c^4 - 2c^2(a+b)^2 = 0$.

$4(a+b)^2 b^2 = \left((a+b)^2 - c^2\right)^2$.

$$b = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2(a+b)}.$$

$$a = (a+b) - b = \frac{(a+b)^2 + c^2}{2(a+b)},$$ notemos que $b < a$.



Construcción 1:

Propiedad de la circunferencia exinscrita al triángulo rectángulo.
El radio de la circunferencia exinscrita al triángulo rectángulo referida al ángulo recto es igual al semiperímetro.

a) Dibujar la semirecta s de origen A.

b) Dibujar el segmento $\overline{AB} = c$, $\overline{AT} = \dfrac{a+b+c}{2}$ sobre la semirecta s.

c) Dibujar la recta r perpendicular a la semirecta s por el punto T.

d) Dibujar la circunferencia de centro T que pasa por A que corta la recta r en el punto I_a centro de la circunferencia exinscrita.

e) Dibujar la circunferencia exinscrita al triángulo (circunferencia de centro I_a que pasa por el punto T.

f) Dibujar la recta t tangente a la circunferencia exinscrita.

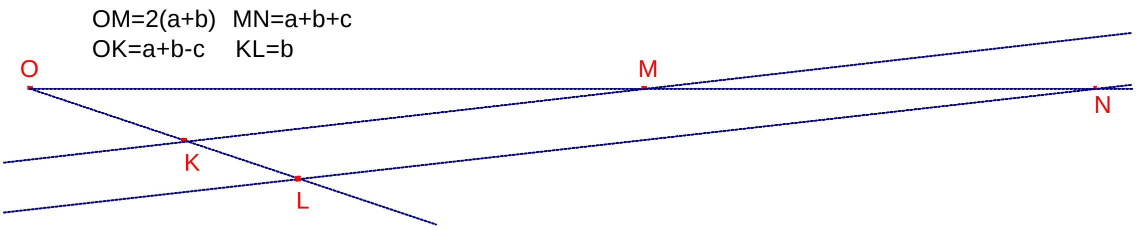
g) Dibujar la recta u perpendicular a la semirecta s que pasa por el punto A, que corta la recta t en el punto C.

h) Dibujar el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Construcción 2:

$$b = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2(a+b)}, \quad b = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b)}, \quad \frac{a+b+c}{b} = \frac{2(a+b)}{a+b-c}$$

Notemos que b es una cuarta proporcional de los segmentos $a+b+c$, $2(a+b)$, $a+b-c$.



Una vez conocido b, dibujar el triángulo rectángulo de catetos b, c.

Construcción 3 (Carlos Benlloch, profesor de dibujo)

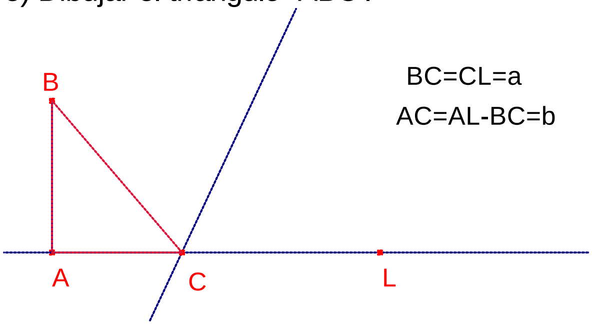
a) Dibujar el segmento $\overline{AB} = c$.

b) Dibujar la recta r perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por el punto A.

c) Dibujar el segmento $\overline{AL} = a + b$ sobre la recta r.

d) Dibujar la mediatriz del segmento $\overline{BL}$ que corta la recta r en el punto C.

e) Dibujar el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solución b):

Supongamos que $a - b < c$ en caso contrario el problema no tiene solución.

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Aplicando el teorema de Pitágoras.

$(a-b)^2 = c^2 + 2b^2 - 2b\sqrt{b^2 + c^2}$.

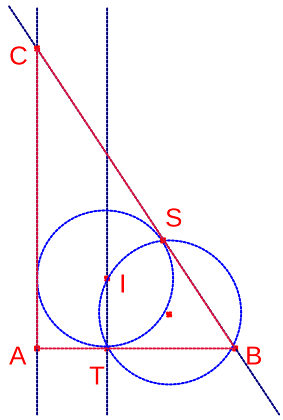
$2b\sqrt{b^2 + c^2} = -(a-b)^2 + c^2 + 2b^2$. Elevando al cuadrado y simplificando:

$4b^2(a-b)^2 = (a-b)^4 + c^4 - 2c^2(a-b)^2$.

$4(a-b)^2 b^2 = \left(-(a-b)^2 + c^2\right)^2$.

$b = \dfrac{-(a-b)^2 + c^2}{2(a-b)}$.

$a = (a-b) + b = \dfrac{(a-b)^2 + c^2}{2(a-b)}$, notemos que $b < a$.



Construcción 1:

Propiedad de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo.

El radio de la circunferencia inscrita al triángulo rectángulo referida a l'ángulo recto es igual al semiperímetro menos la hipotenusa.

a) Dibujar la semirecta s de origen A.

b) Dibujar el segmento $\overline{AB} = c$, $\overline{AT} = \dfrac{-a+b+c}{2}$ sobre la semirecta s.

c) Dibujar la recta r perpendicular a la semirecta s por el punto T.

d) Dibujar la circunferencia de centro T que pasa por A que corta la recta r en el punto I centro de la circunferencia inscrita.

e) Dibujar la circunferencia inscrita al triángulo (circunferencia de centro I que pasa por el punto T.

f) Dibujar la recta t tangente a la circunferencia inscrita.

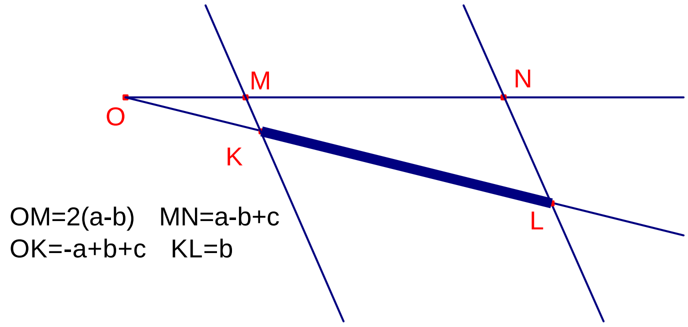
g) Dibujar la recta u perpendicular a la semirecta s que pasa por el punto A, que corta la recta t en el punto C.

h) Dibujar el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Construcción 2:

$$b=\frac{-(a-b)^2+c^2}{2(a-b)},\ b=\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2(a-b)},\ \frac{a-b+c}{b}=\frac{2(a-b)}{-a+b+c}$$

Notemos que b es una cuarta proporcional de los segmentos $a+b-c$, $2(a-b)$, $-a+b+c$.



Una vez conocido b, dibujar el triángulo rectángulo de catetos b, c.

Construcción 3 (Carlos Benlloch)

a) Dibujar el segmento $\overline{AB}=c$.

b) Dibujar la recta r perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por el punto A.

c) Dibujar el segmento $\overline{AL}=a-b$ sobre la recta r.

d) Dibujar la mediatriz del segmento $\overline{BL}$ que corta la recta r en el punto C.

e) Dibujar el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.