Problema 538.

Sea ABC un triángulo, con lados a, b, c, alturas h_a, h_b, h_c, medianas m_a, m_b, m_c, y bisectrices interiores t_a, t_b, t_c, respectivamente. Probar que :

(1) $h_a h_b h_c < abc$

(2) $t_a t_b t_c < abc$

(3) $h_a h_b t_c < abc$

(4) $h_a t_b t_c < abc$

(5) $h_a h_b m_c < abc$

(6) $h_a m_a h_b < abc$

(7) $h_a t_a h_b < abc$

(8) $t_a m_a h_b < abc$

(9) $t_a t_b m_c < abc$

(10) $h_a t_b m_c < abc$

Garfunkel, J. (1968), A Project in Mathematics. The Mathematics Teacher, March, pp. 253-263

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Soluzione di Ercole Suppa.

Indichiamo rispettivamente con s, r, R, Δ il semiperimetro, l'inraggio, il circonraggio e l'area del triangolo $\triangle ABC$.

(1) Abbiamo:

$$h_a \cdot h_b \cdot h_c = \frac{2\Delta}{a} \cdot \frac{2\Delta}{b} \cdot \frac{2\Delta}{c} = \frac{bc \sin A}{a} \cdot \frac{ac \sin B}{b} \cdot \frac{ab \sin C}{c} < abc \qquad \blacksquare$$

(2) Dalla formula che fornisce la lunghezza della bisettrice t_a in funzione dei lati segue che

$$t_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \quad \Rightarrow \quad t_a < \frac{2bc}{b+c} \leq \sqrt{bc} \tag{2.1}$$

dove nell'ultima maggiorazione abbiamo usato la disuguaglianza AM-GM.

Usando la (2.1) e le formule analoghe per t_b, t_c otteniamo:

$$t_a \cdot t_b \cdot t_c \leq \sqrt{bc}\sqrt{ac}\sqrt{ab} = abc \qquad \blacksquare$$

(3) La disuguaglianza discende da (2) tenuto conto che $h_a \leq t_a$ e $h_b \leq t_b$. $\blacksquare$

(4) La disuguaglianza discende da (2) tenuto conto che $h_a \leq t_a$. $\blacksquare$

(5) Usando la formula $4\Delta R = abc$ e tenuto conto che $m_c < 2R$ abbiamo:

$$h_a h_b m_c < \frac{2\Delta}{a} \cdot \frac{2\Delta}{b} \cdot 2R = 4\Delta R \cdot \frac{2\Delta}{ab} = abc \cdot \frac{ab \sin C}{ab} \leq abc \qquad \blacksquare$$

(6) Si dimostra come la (5) tenuto conto che $m_a < 2R$. $\blacksquare$

(7) Si dimostra come la (5) tenuto conto che $t_a < 2R$. $\blacksquare$

(8) Dalla formula della mediana, tenuto conto della disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} < \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - (b-c)^2} = \frac{b+c}{2} \tag{8.1}$$

Dalle disuguaglianze (2.1) e (8.1), tento conto che $h_b \leq a$, discende che

$$t_a m_a h_b < \frac{2bc}{b+c} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot a = abc \qquad \blacksquare$$

(9) Dalla disuguaglianza triangolare $c \leq a + b$ discende che:

$$\begin{aligned} c^2 = c^2 \cdot \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4ab} &\geq (a+b)^2 \cdot \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab} = \\ = (a+b)^2 \cdot \frac{(s-a)(s-b)}{ab} &= (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} \end{aligned}$$

e allora, dalla formula di Apollonio, otteniamo:

$$\begin{aligned} 4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 &= (a+b)^2 + (a-b)^2 - c^2 \leq \\ \leq (a+b)^2 - (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} &= (a+b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} \end{aligned} \tag{9.2}$$

Dalla (9.2), estraendo la radice quadrata, otteniamo la seguente disuguaglianza, più forte della (8.1):

$$m_c \leq \frac{a+b}{2} \cos \frac{C}{2} \tag{9.3}$$

Ora, dalla (9.3), del teorema dei seni e della nota identità

$$4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C \tag{9.4}$$

abbiamo:

$$
\begin{aligned}
t_a t_b m_c &\leq \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cos\frac{C}{2} = \\
&= \frac{abc^2}{(b+c)(a+c)}\cdot\frac{a+b}{2}\cdot(\sin A+\sin B+\sin C) \leq \\
&\leq \frac{abc^2}{(b+c)(a+c)}\cdot\frac{2R+2R}{2}\cdot\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right) = \\
&\leq \frac{abc^2(a+b+c)}{(b+c)(a+c)} = \\
&= abc\cdot\frac{c}{b+c}\cdot\frac{a+b+c}{b+c} < abc
\end{aligned}
\qquad \blacksquare
$$

(10) La disuguaglianza discende da (9) tenuto conto che $h_a \leq t_a$. $\blacksquare$

Osservazione. Per completezza diamo la dimostrazione dell'identità (9.4):

$$
\begin{aligned}
\sin A+\sin B+\sin C &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B) = \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \\
&= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right) = \\
&= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}
\end{aligned}
\qquad \blacksquare
$$