

Problema 542.

Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita del triángulo ABC . Es conocido que los pies de las perpendiculares trazadas por P a los lados AB , BC y CA están alineados en la recta de Simson. Demostrar que las rectas de Simson de dos puntos P y Q diametralmente opuestos son perpendiculares.

"Baltic Way 1990" Mathematical Team Contest, Riga, November 24, 1990

Propuesto por Gennaro Rispoli, profesor de matemáticas en el Liceo Scientifico Sperimentale annesso al Liceo Ginnasio "T.L. Caro", (Salerno), Italia.

Soluzione di Ercole Suppa.

Sia P un punto della circonferenza circoscritta e sia Q il punto diametralmente opposto a P ; indichiamo con p , q le rette di Simson di P , Q e denotiamo con X , Y i punti in cui le perpendicolari ad AC condotte da P , Q incontrano il circoncerchio di $\triangle ABC$ (FIGURA 1).

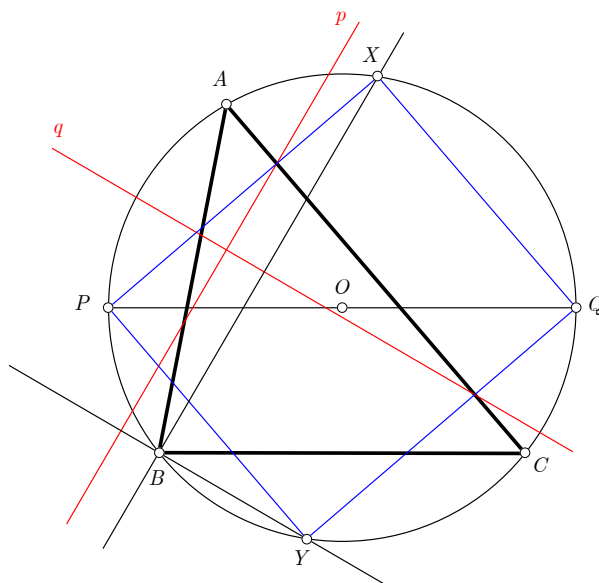


FIGURA 1

Dimostriamo che la retta BX è parallela a p (vedi FIGURA 2).

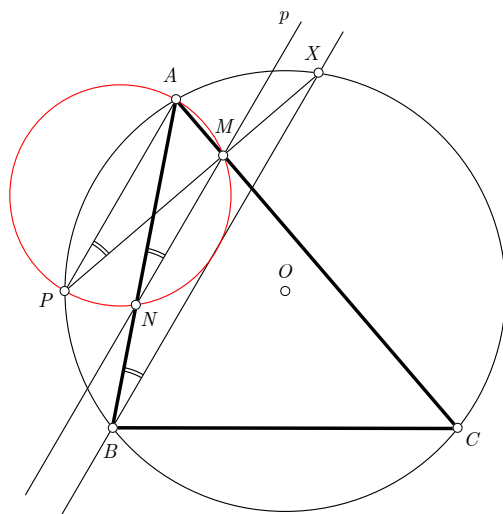
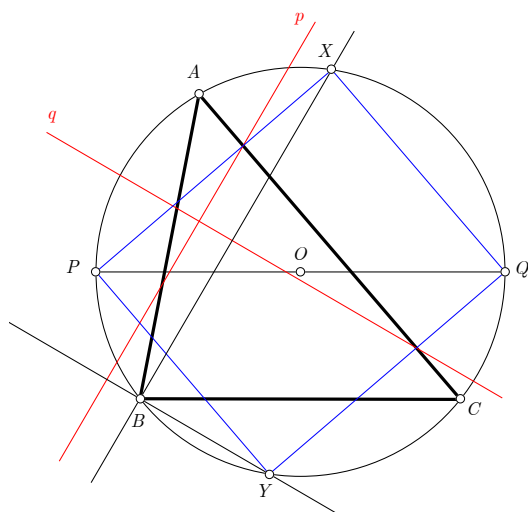


FIGURA 2

Infatti, indicati con M, N i punti di intersezione di p con AC, AB ed osservato che il quadrilatero $APNM$ è ciclico, abbiamo:

$$\angle ANM = \angle APM = \angle APX = \angle ABX$$

In modo analogo si prova che BY è parallela a q .



Pertanto $PXQY$ è un rettangolo, quindi XY è un diametro di (O) e $\angle XBY = 90^\circ$, ossia BX è perpendicolare a BY . Poiché p è parallela a BX e q è parallela a BY ne segue che p e q sono perpendicolari. $\square$