

Problema 542

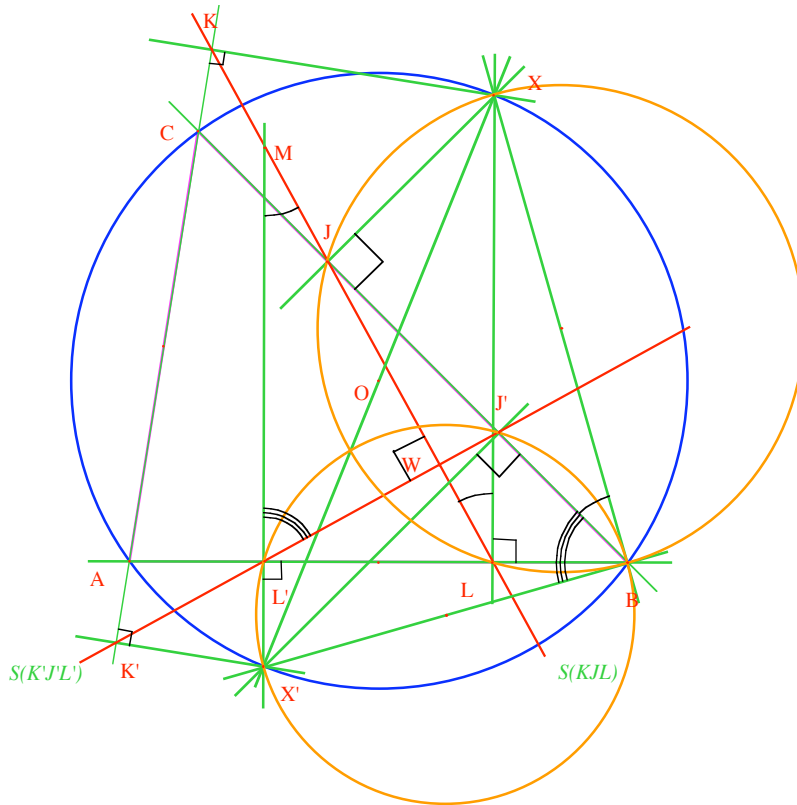
8.- Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita del triángulo ABC . Es conocido que los pies de las perpendiculares trazadas por P a los lados AB , BC y CA están alineados en la recta de Simson. Demostrar que las rectas de Simson de dos puntos P_1 y P_2 diametralmente opuestos son perpendiculares.

“Baltic Way – 90”, Mathematical Team Contest, Riga, November 24, 1990

Riflessioni di Gennaro Rispoli

Dato un triangolo ABC , costruiamo in primis la corrispondente circonferenza circoscritta. Preso inoltre un punto arbitrario X su tale circonferenza possiamo individuare per mezzo della retta OX il punto X' diametralmente opposto al punto X .

Se K, J ed L sono i piedi delle perpendicolari condotte da X rispettivamente ai lati CA, BC ed AB , possiamo costruire la retta di Simson $S_{(KJL)}$ associata al punto X . Similmente, possiamo costruire la retta di Simson $S_{(K'J'L')}$ associata al punto X' . Sia inoltre W il punto di intersezione di tali rette di Simson. Si tratta di provare che l'angolo $\angle W$ è retto.



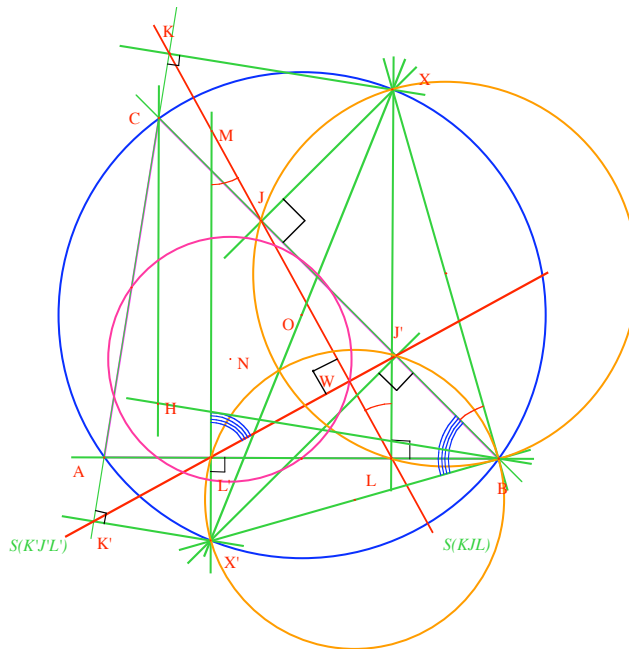
Consideriamo il quadrilatero $LBXJ$. Si tratta di un quadrilatero ciclico poiché gli angoli $\angle XJB$ e $\angle XLB$ sono retti. Vediamo inoltre che gli angoli $\angle J LX$ e $\angle JBX$ sono uguali poiché insistono sullo stesso arco XJ .

Anche il quadrilatero $L'X'BJ'$ è ciclico poiché gli angoli $\angle X'L'B$ e $\angle X'J'B$ sono retti. Vediamo inoltre che gli angoli $\angle X'BJ'$ e $\angle ML'J'$ sono uguali poiché supplementari dello stesso angolo $\angle J'L'X'$.

Vediamo ancora che l'angolo $\angle MLX$ è uguale all'angolo $\angle LML'$ perché angoli alterni interni delle rette parallele LX ed $L'X'$ tagliate dalla trasversale ML e che l'angolo $\angle X'BX$ è un angolo retto essendo il triangolo $X'BX$ inscritto nella semicirconferenza di diametro XX' .

Possiamo allora affermare che il triangolo $ML'W$ possiede gli angoli di vertici M ed L' complementari, donde la tesi.

Un'altra considerazione: al variare di X sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC dato, il punto W descrive il cerchio dei nove punti associato allo stesso triangolo di riferimento ABC . Si veda Altshiller-Court, N., *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the triangle and the Circle*, Dover 2007, New York (Chapter V, *The Simson Line*, pag. 146), © 1952 by Nathan Altshiller Court.



Bibliografia:

Aarts J.M.,
Altshiller-Court, N.,

Bottema O.,

Plane and Solid Geometry, 2008, Springer, New York

College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the triangle and the Circle, Dover 2007, New York © 1952 by Nathan Altshiller Court

Topics in Elementary Geometry, 2008, Springer, New York