Propuesto por Gennaro Rispoli, profesor de matemáticas en el Liceo Scientifico sperimentale annesso al Liceo Gimnasio "T.L. Caro", 8407 Sarno (Salerno), Italia.

***Problema* 542**

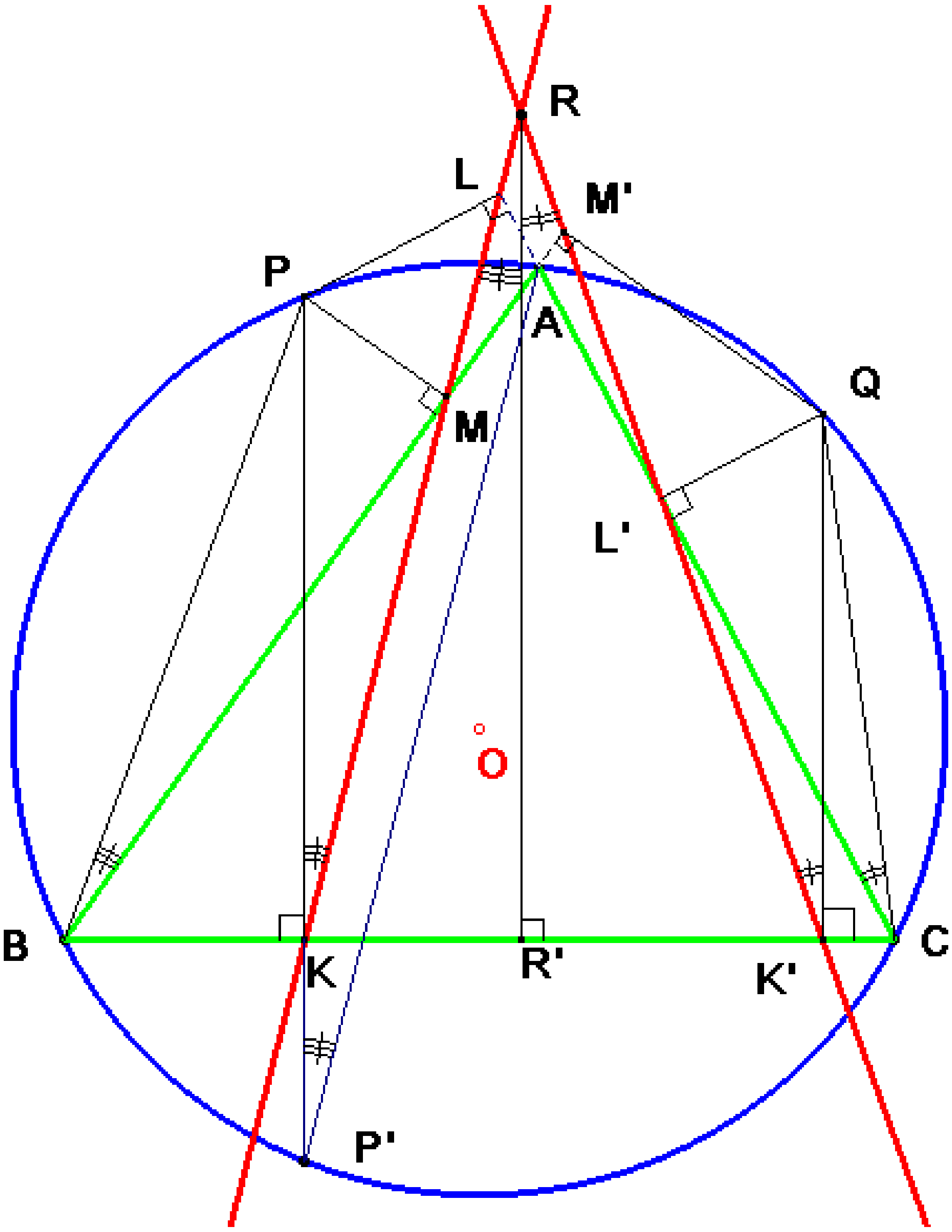
Problema IR7

8.- *Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita del triángulo ABC. Es conocido que los pies de las perpendiculares trazadas por P a los lados AB, BC y CA están alineados en la recta de Simson. Demostrar que las rectas de Simson de dos puntos* P_1 *y* P_2 *diametralmente opuestos son perpendiculares.*

"Baltic Way- 90" Mathematical Team Contest, Riga, November 24, 1990.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S.* Fray Luis de León *de Salamanca

Vamos a demostrar que las rectas de Simson correspondientes a dos puntos cualesquiera *P* y *Q* forman un ángulo igual a la mitad del arco de circunferencia que abarcan estos puntos. De ahí se deduce en particular que estas rectas sean perpendiculares cuando los puntos sean diametralmente opuestos.



Sea *R* el punto donde se encuentran las dos rectas de Simson-Wallace. Trazo *RR'* perpendicular al lado *BC*. El ángulo que forman queda dividido en dos. El de la izquierda ∡*KRR'* es igual a ∡*PKR* (*PK* ∥*RR'*). A su vez, éste es igual a ∡*PBA* por ser inscriptible el cuadrilátero *BKMP*. Por tanto ∡*KRR'*=∡*PBA*. Además la recta *AP'* es paralela a la recta de Simson-Wallace de *P*, pues ∡*PBA* = ∡*PP'A* y esta propiedad puede resultar de utilidad para construir la recta de Simson-Wallace de un punto.

Para la otra parte, el ángulo ∡*K'RR'*, un razonamiento similar, ahora con el cuadrilátero inscriptible *CK'L'Q* nos lleva a que ∡ *K'RR'* = ∡*ACQ*. Uniendo ambos resultados tenemos que el ángulo de las dos rectas es igual a la de dos ángulos inscritos que abarcan (entre los dos) el arco *BC*. El teorema del ángulo inscrito concluye la demostración. ■