

Problema 542.

- Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita del triángulo ABC . Es conocido que los pies de las perpendiculares trazadas por P a los lados AB , BC y CA están alineados en la recta de Simson. Demostrar que las rectas de Simson de dos puntos P_1 y P_2 diametralmente opuestos son perpendiculares. “Baltic Way – 90” Mathematical Team Contest, Riga, November 24, 1990

Propuesto por Gennaro Rispoli, profesor de matemáticas en el Liceo Scientifico Sperimentale annesso al Liceo Ginnasio "T.L. Caro", 84087 Sarno (Salerno), Italia.

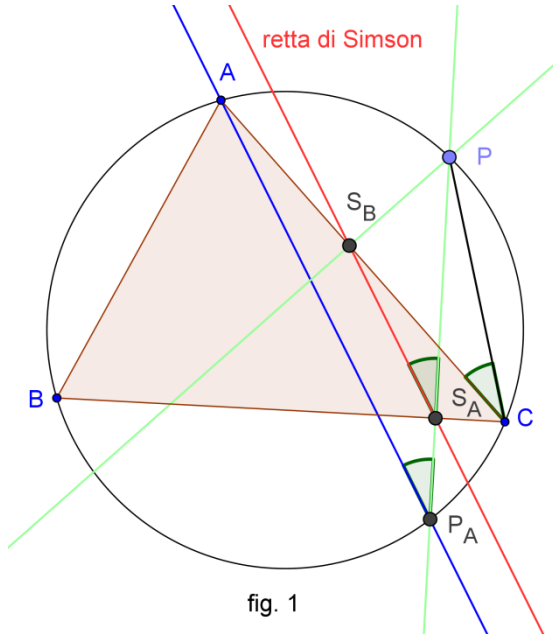


fig. 1

LEMMA

Sia P un punto sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC . Sia P_A l'altro punto della circonferenza appartenente alla retta passante per P e perpendicolare al lato BC . Allora la retta di Simson relativa al punto P ed al triangolo ABC sarà parallela alla retta passante per A e P_A .

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo (fig. 1) che il quadrilatero $PS_B S_A C$ è ciclico essendo $\angle P_S A C$ e $\angle P_S B C$ entrambi angoli retti. Pertanto

- L'angolo $\angle AP_A P$ è congruente all'angolo $\angle ACP$ insistendo sullo stesso arco AP
- L'angolo $\angle ACP$ è congruente ad $\angle S_B S_A P$ insistendo sullo stesso arco $S_B P$ della circonferenza circoscritta al quadrilatero $PS_B S_A C$

Pertanto essendo l'angolo $\angle S_B S_A P$ congruente all'angolo $\angle AP_A P$ la retta di Simson è parallela alla retta passante per A e P_A .

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

Dimostreremo che l'ampiezza dell'angolo formato dalle rette di Simson relative a due punti P e Q appartenenti alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC è uguale alla metà dell'angolo al centro che insiste sull'arco PQ . Pertanto se P e Q sono opposti allora le rette di Simson sono perpendicolari.

(I. D'Ignazio, E. Suppa, "Il problema Geometrico" Problema (y) pag 276)

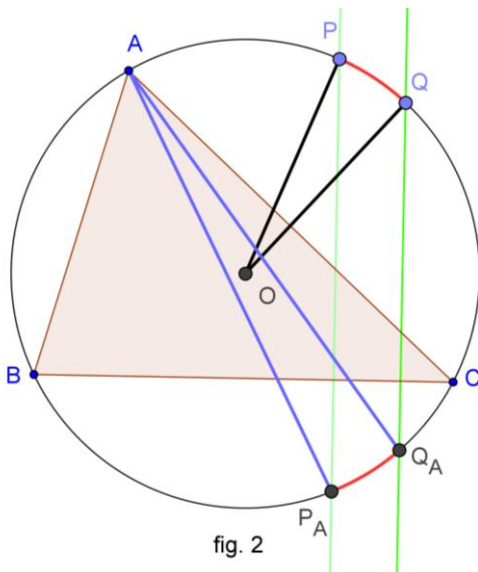


fig. 2

DIMOSTRAZIONE

Data la circonferenza (fig. 2) circoscritta al triangolo ABC . Indichiamo con P_A e Q_A gli altri punti di intersezione della circonferenza con le rette passanti per P e Q e perpendicolare al lato BC . Osserviamo che

✚ per il precedente lemma le rette AP_A e AQ_A sono parallele alle rette di Simson relative ai punti P e Q rispettivamente perciò l'angolo $\angle P_A A Q_A$ è congruente a quello formato dalle rette di Simson.

✚ Inoltre l'arco PQ è congruente all'arco $P_A Q_A$ essendo PP_A e QQ_A corde parallele.

Pertanto l'angolo alla circonferenza $\angle P_A A Q_A$ insistendo su di un arco congruente a PQ è la metà dell'angolo al centro che insiste su PQ .

C.V.D.