Problema 543

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez
David Puente García

Burgos, 28 de enero de 2015

Enunciado

Sea un ABC un triángulo plano, a, b y c, los lados, y A constante. Se tiene la relación $a^n = b^n + c^n$, donde n es constante.

Demostrar que necesariamente ha de ser $n = 2$ y $A = \frac{\pi}{2}$.

Enunciado alternativo propuesto por Vicente Vicario

Sea ABC un triángulo plano, a, b y c, las longitudes de sus lados. Sea n un número natural mayor o igual que 2. Sea A un ángulo constante.

Demostrar que si para todos los triángulos ABC que se pueden formar con el segmento BC fijo y el vértice A recorriendo el arco capaz de magnitud A constante, se tiene la relación $a^n = b^n + c^n$, entonces necesariamente $n = 2$ y $A = \frac{\pi}{2}$.

Solución

1. Introducción

Se va a tomar como referencia la figura siguiente. Sin pérdida de generalidad, se asume que $a = 1$.

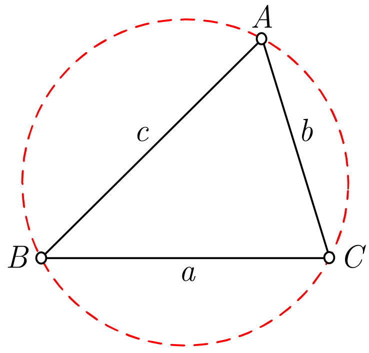

Figura 1: Triángulo ABC.

La demostración comprende dos partes:

1. Se va a estudiar el caso particular $n = 2$ en tres subcasos: $A < \frac{\pi}{2}$, $A = \frac{\pi}{2}$ y $A > \frac{\pi}{2}$.
2. Para $n > 2$, se va a probar que siempre hay triángulos en el arco capaz de cualquier ángulo A que no satisfacen $a^n = 1 = b^n + c^n$.

2. Caso $n = 2$

2.1. $A < \frac{\pi}{2}$

Por el teorema del coseno, se tiene

$$1 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \tag{1}$$

Si $A < \frac{\pi}{2}$, $\cos A > 0$, luego $1 < b^2 + c^2$. Nótese que podemos acotar b y c de una de estas formas[1]:

- $b \geqslant c \geqslant 1$. A lo largo de la demostración, sin pérdida de generalidad, se va asumir que el lado $b \geq c$.
- $b \geq 1 \geq c$.
- $1 \geq b \geq c$.

2.2. $A = \frac{\pi}{2}$

El lado a es el diámetro de la circunferencia de la figura 1. Entonces, todos los triángulos son rectángulos y verifican $1 = b^2 + c^2$.

2.3. $A > \frac{\pi}{2}$

Con un razonamiento análogo al del caso 2.1, si $A > \frac{\pi}{2}$, $\cos A < 0$ y $1 > b^2 + c^2$. En este subcaso, b y c se pueden acotar sólo de una forma: $1 > b \geqslant c$.

3. Caso $n > 2$

3.1. $A < \frac{\pi}{2}$ y $b \geqslant c \geqslant 1$

La sucesión $f(n) = 1 - a^n - b^n$ es monótona decreciente[2]. Como $f(2) < 0$, $f(n) < 0$ $\forall n > 2$.

[1] Sólo el triángulo equilátero donde $a = b = c = 1$ cumple más de una desigualdad –de hecho, cumple las tres simultáneamente–.

[2] Si $b = c = 1$, la sucesión es la constante -1.

3.2. $A < \frac{\pi}{2}$ y $b \geq 1 \geq c$

Se va a probar por reducción al absurdo que $1 < b^{m+2} + c^{m+2}$ con $n = m + 2$ y $m > 0$. Supongamos que se cumple la desigualdad contraria, es decir

$$1 \geq b^{m+2} + c^{m+2} \Rightarrow 1 - b^{m+2} - c^{m+2} \geq 0. \tag{2}$$

Como b y c son los lados de un triángulo, cumplen el teorema del coseno. De (1), se puede expresar c^2 como

$$c^2 = 1 - b^2 + 2bc\cos A. \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2), se tiene

$$1 - b^{m+2} - c^m(1 - b^2 + 2bc\cos A) \geq 0,$$

y desarrollando se llega a

$$1 - b^{m+2} - c^m + c^m b^2 - 2bc^{m+1}\cos A \geq 0,$$

con lo que se se puede acotar $\cos A$ como

$$\frac{1 - b^{m+2} - c^m + c^m b^2}{2bc^{m+1}} \geq \cos A.$$

Por hipótesis, $b \geq 1$, luego $b^m \geq 1\ \forall m > 0$. Podemos acotar el primer miembro como

$$\frac{b^m - b^{m+2} - c^m + c^m b^2}{2bc^{m+1}} \geq \frac{1 - b^{m+2} - c^m + c^m b^2}{2bc^{m+1}} \geq \cos A,$$

y el primer miembro de esta desigualdad se puede factorizar como

$$\frac{b^m - b^{m+2} - c^m + c^m b^2}{2bc^{m+1}} = \frac{b^m(1 - b^2) - c^m(1 - b^2)}{2bc^{m+1}} = \frac{(b^m - c^m)(1 - b^2)}{2bc^{m+1}} \geq \cos A$$

Por hipótesis, $b \geq c$, luego $b^m \geq c^m\ \forall m > 0$, luego el primer factor del numerador del primer miembro es positivo. Por otro lado, por hipótesis, $b \geq 1$, luego $1 - b^2 \leq 0$; por tanto, el numerador es menor o igual a 0. Como el denominador es estrictamente positivo, el primer miembro de la desigualdad es menor o igual a 0, pero por hipótesis $\cos A > 0$ porque $A < \frac{\pi}{2}$, con lo que se llega a un absurdo. Se concluye que no se cumple la desigualdad de partida (2), sino

$$1 < b^{m+2} + c^{m+2} \quad \forall m > 0.$$

3.3. $A < \frac{\pi}{2}$ y $1 \geq b \geq c$

Se va a demostrar que hay triángulos con el vértice A en el arco capaz del ángulo A con $b \geq 1$. A partir del teorema del coseno de (1), se puede resolver la ecuación de segundo grado en c como

$$c = b\cos A \pm \sqrt{1 - b^2 \operatorname{sen}^2 A}.$$

Para que haya solución, se tiene que cumplir

$$1 - b^2 \operatorname{sen}^2 A \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{b} \geq \operatorname{sen} A.$$

Si $b = 1$, se tiene que $1 \geq \operatorname{sen} A$ que es cierto $\forall A$. Por tanto, siempre se puede construir al menos un triángulo con un lado $b \geq 1\ \forall A$. Los triángulos con $A < \frac{\pi}{2}$ y $b \geq 1$ no tienen solución como se ha probado en los subcasos 3.1 y 3.2.

3.4. $A \geq \frac{\pi}{2}$

Se tiene que $1 > b \geqslant c$, luego la sucesión $f(n) = 1 - a^n - b^n$ es monótona creciente. Como $f(2) \geq 0$ como se ha probado anteriormente, $f(n) > 0 \; \forall n > 2$.

4. Conclusión

En resumen, se ha probado que sólo existe solución para $n = 2$ y corresponde al arco capaz de $\frac{\pi}{2}$. Para $n > 2$, $\nexists(n, A)$ que cumplan la condición del enunciado alternativo, i.e., que todos los triángulos con el vértice A recorriendo el arco capaz de cualquier ángulo que cumplan $1 = b^n + c^n$. Q.E.D.