

Problema 544.

Demostrar que esiste un triángulo acutángulo, uno de cuyos ángulos mide 60° y tal que el área de su triángulo órtico sea igual al área de su triángulo de Morley.

Vicario, V. (2010), Comunicación personal.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

Soluzione di Ercole Suppa.

Ricordiamo¹ che l'area del triangolo ortico di un triangolo $\triangle ABC$ di lati $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ è data da

$$\Delta_H = \frac{R^2}{2} |\sin(2A) \sin(2B) \sin(2C)| \quad (1)$$

dove R è il raggio della circonferenza circoscritta.

Ricordiamo² altresì che i lati del triangolo di Morley di un triangolo $\triangle ABC$ hanno lunghezze

$$a' = b' = c' = 8R \sin \frac{A}{3} \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3} \quad (2)$$

e quindi l'area del triangolo di Morley è data da:

$$\Delta_M = 16\sqrt{3}R^2 \sin^2 \frac{A}{3} \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \quad (3)$$

Da (1) e (3) otteniamo che il triangolo di Morley ed il triangolo ortico di $\triangle ABC$ hanno la stessa area se, e solo se, è verificata l'uguaglianza:

$$|\sin(2A) \sin(2B) \sin(2C)| = 32\sqrt{3} \sin^2 \frac{A}{3} \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \quad (4)$$

Per concludere la dimostrazione, mostriamo che esiste un triangolo verificante la (4), con $A = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad. Ponendo $2B = 3x$ e $2C = 3y$, la (4) può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} |\sin(2B) \sin(2C)| &= 32\sqrt{3} \sin^2 \frac{\pi}{9} \cdot \frac{1 - \cos \frac{2B}{3}}{2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{2C}{3}}{2} && \Leftrightarrow \\ |\sin 3x \sin 3y| &= 16 \sin^2 \frac{\pi}{9} (1 - \cos x) (1 - \cos y) \end{aligned} \quad (5)$$

Essendo $3x + 3y = 2(B + C) = \frac{4\pi}{3}$ risulta che $x + y = \frac{4\pi}{9}$. Pertanto l'equazione (5) è equivalente a

$$\left| \sin(3x) \sin \left(\frac{4\pi}{9} - 3x \right) \right| - 16 \sin^2 \frac{\pi}{9} (1 - \cos x) \left(1 - \cos \left(\frac{4\pi}{9} - x \right) \right) = 0$$

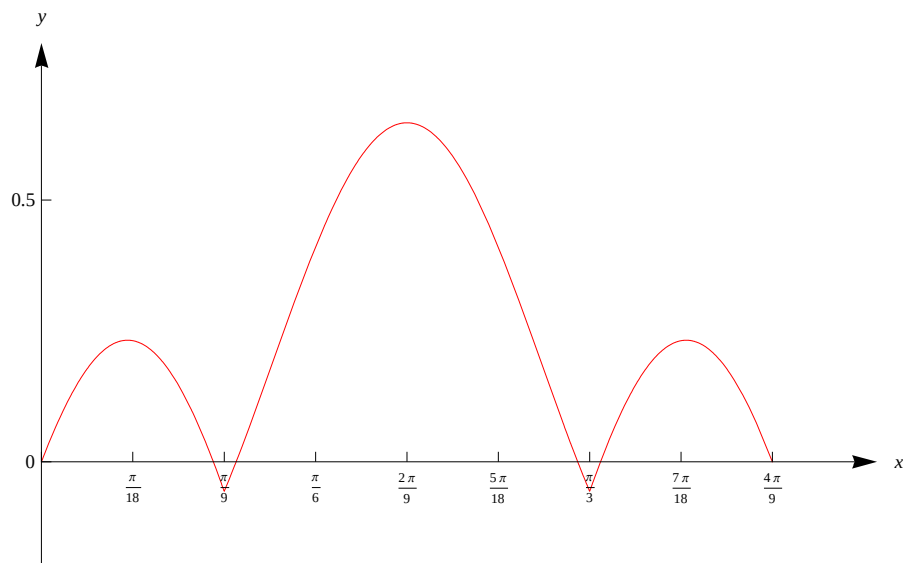
¹<http://mathworld.wolfram.com/OrthicTriangle.html>

²<http://mathworld.wolfram.com/FirstMorleyTriangle.html>

Dal grafico della funzione

$$f(x) = \left| \sin(3x) \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 3x\right) \right| - 16 \sin^2 \frac{\pi}{9} (1 - \cos x) \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi}{9} - x\right)\right)$$

si evince che l'equazione $f(x) = 0$ ammette quattro radici contenute nell'intervallo $0 < x < \frac{4\pi}{9}$.



L'esistenza di quattro soluzioni $0 < x_1, x_2, x_3, x_4 < \frac{4\pi}{9}$ è confermata anche dal teorema degli zeri delle funzioni continue, dato che

$$f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0.2312 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{9}\right) = -0.0564 \quad , \quad f\left(\frac{2\pi}{9}\right) = 0.6475$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0.0564 \quad , \quad f\left(\frac{7\pi}{18}\right) = 0.2312$$

Mediante MATHEMATICA, usando la funzione **FindRoot**, otteniamo i seguenti valori approssimati di x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$x1 = x /. \text{FindRoot}\left[f[x], \left\{x, \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{9}\right\}\right] // \text{N}$$

0.328332

$$x2 = x /. \text{FindRoot}\left[f[x], \left\{x, \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}\right\}\right] // \text{N}$$

0.371892

$$x3 = x /. \text{FindRoot}\left[f[x], \left\{x, \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}\right\}\right] // \text{N}$$

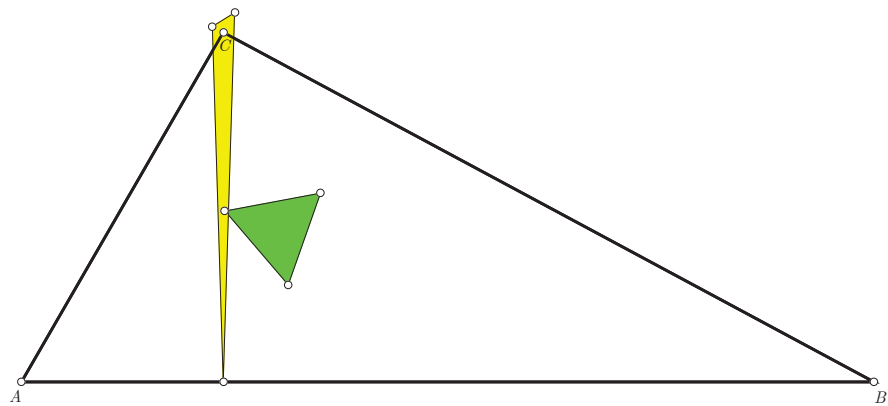
1.02437

$$x4 = x /. \text{FindRoot}\left[f[x], \left\{x, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{18}\right\}\right] // \text{N}$$

1.06793

Scegliendo, ad esempio, la radice x_1 otteniamo un triangolo $\triangle ABC$ verificante la condizione richiesta avente angoli di ampiezze:

$$A = 60^\circ \quad , \quad B = \frac{3x_1}{2} = 0.4924 \text{ rad} = 28^\circ 13' 5'' \quad , \quad \frac{3x_2}{2} = 1.6019 \text{ rad} = 91^\circ 46' 55''$$



□