

Problema 546.

Sea ABC un triángulo y AA_a , la bisectriz interior del ángulo A , siendo A_a su pie sobre el lado BC . Sean B_a y C_a , los puntos obtenidos por intersección de la perpendicular que pasa por A_a y corta al lado AC y AB , respectivamente. Definimos los puntos $D_a = AA_a \cap B_aC_a$, $E_a = A_aB_a \cap CC_a$, $F_a = A_aC_a \cap BB_a$. Probar que :

- (a) La altura desde A a BC y las rectas BB_a y CC_a concurren en el punto X_a .
- (b) ¿Están los puntos $I_a = AB_a \cap A_aC_a$, $J_a = AB \cap D_aF_a$ y $K_a = B_aC_a \cap BC$ alineados?
- (c) Haciendo las mismas construcciones para los vértices B y C , y sus lados opuestos y con las notaciones anteriores, obtenemos el triángulo $X_aX_bX_c$. ¿Qué relación existe entre triángulo y el triángulo ABC ?

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Soluzione di Ercole Suppa.

Per risolvere il problema utilizziamo coordinate baricentriche omogenee rispetto al triangolo $\triangle ABC$. I calcoli sono svolti con il programma MATHEMATICA mediante le routines contenute nel pacchetto `baricentricas.nb`, prelevabile dal sito di Francisco Javier García Capitán ¹.

```
<< Baricentricas`;
```

```
ptAa = Punto[Recta[ptB, ptC], Recta[ptI, ptA]]
```

```
{0, b, c}
```

```
ptBa = Pie[ptAa, ptA, ptC]
```

```
{a2 + b2 - c2, 0, -a2 + (b + c)2}
```

```
ptCa = Pie[ptAa, ptA, ptB]
```

```
{a2 - b2 + c2, -a2 + (b + c)2, 0}
```

```
ptDa = Punto[Recta[ptA, ptAa], Recta[ptBa, ptCa]]
```

```
{-(-a2 + (b - c)2)(b + c), b(-a2 + (b + c)2), c(-a2 + (b + c)2)}
```

```
ptEa = Punto[Recta[ptAa, ptBa], Recta[ptC, ptCa]]
```

```
{-b(-a4 + (b2 - c2)2), b(-a4 + 2a2c(b + c) + (b - c)(b + c)3),  
-(b + c)(a4 + (b2 - c2)2 - 2a2(b2 + c2))}
```

```
ptFa = Punto[Recta[ptAa, ptCa], Recta[ptB, ptBa]]
```

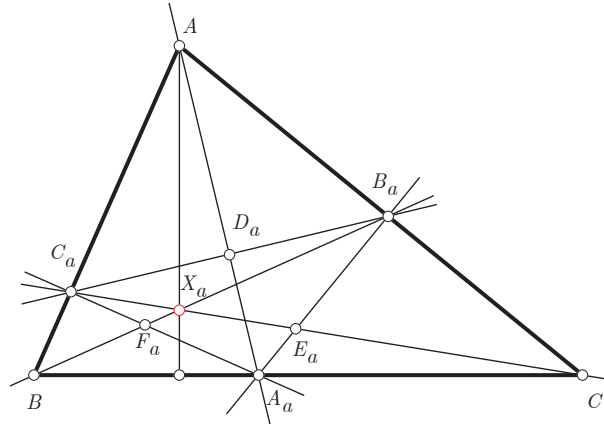
```
{c(-a4 + (b2 - c2)2), (b + c)(a4 + (b2 - c2)2 - 2a2(b2 + c2)), c(a4 - 2a2b(b + c) + (b - c)(b + c)3)}
```

(a) Per verificare che l'altezza condotta dal vertice A e le rette BB_a , CC_a sono concorrenti usiamo la funzione booleana `SonConcurrentes`:

```
SonConcurrentes[{Perpendicular[ptA, ptB, ptC], Recta[ptB, ptBa], Recta[ptC, ptCa]]}
```

```
True
```

¹<http://garcia capitán.auna.com/baricentricas/>



Il punto $X_a = BB_a \cap CC_a$ ha coordinate baricentriche:

ptXa = Punto[Recta[ptB, ptBa], Recta[ptC, ptCa]]

$$\{a^4 - (b^2 - c^2)^2, -a^4 + 2a^2c(b+c) + (b-c)(b+c)^3, -a^4 + 2a^2b(b+c) - (b-c)(b+c)^3\}$$

(b) I punti I_a, J_a, K_a hanno coordinate:

ptIa = Punto[Recta[ptA, ptBa], Recta[ptAa, ptCa]]

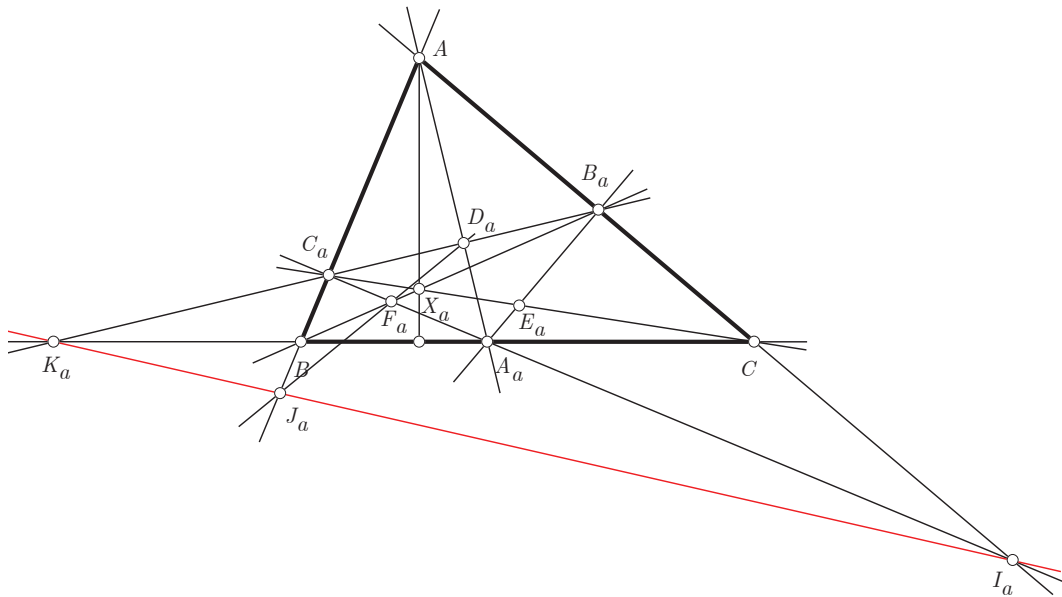
$$\{-b(a^2 - b^2 + c^2), 0, c(-a^2 + (b+c)^2)\}$$

ptJa = Punto[Recta[ptA, ptB], Recta[ptDa, ptFa]]

$$\{b(a^2 - b^2 + c^2)^2, c(a^4 - 2a^2c(b+c) - (b-c)(b+c)^3), 0\}$$

ptKa = Punto[Recta[ptBa, ptCa], Recta[ptB, ptC]]

$$\{0, -a^2 - b^2 + c^2, a^2 - b^2 + c^2\}$$

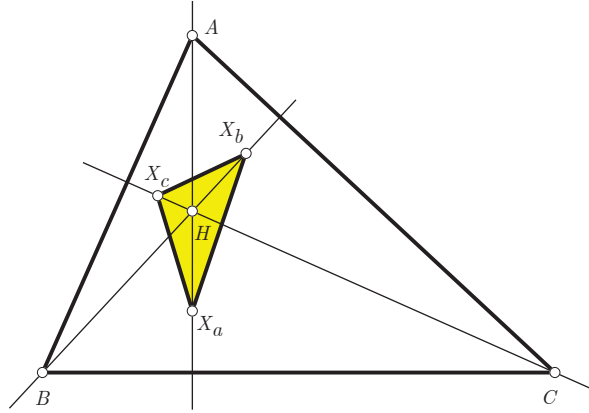


Per verificare che i punti I_a, J_a, K_a sono allineati usiamo la funzione booleana **EstanAlineados**:

EstanAlineados[{ptIa, ptJa, ptKa}]

True

(c) A giudicare dalla seguente figura sembra che i triangoli $\triangle X_a X_b X_c$ ed $\triangle ABC$ siano prospettivi.



Per confermare tale supposizione, calcoliamo le coordinate di X_b ed X_c mediante la routine **PermutarTerna** e poi verifichiamo che i triangoli $\triangle X_a X_b X_c$ ed $\triangle ABC$ sono prospettivi per mezzo della funzione booleana **SonPerspectivos**:

ptXb = PermutarTerna [ptXa]

$$\left\{ -b^4 + 2b^2c(a+c) - (-a+c)(a+c)^3, b^4 - (-a^2+c^2)^2, -b^4 + 2ab^2(a+c) + (-a+c)(a+c)^3 \right\}$$

ptXc = PermutarTerna [ptXb]

$$\left\{ (a-b)(a+b)^3 + 2b(a+b)c^2 - c^4, -(a-b)(a+b)^3 + 2a(a+b)c^2 - c^4, -(a^2-b^2)^2 + c^4 \right\}$$

SonPerspectivos [{ptA, ptB, ptC}, {ptXa, ptXb, ptXc}]

True

Il centro di prospettività P ha coordinate baricentriche

ptP = Perspector [{ptA, ptB, ptC}, {ptXa, ptXb, ptXc}]

$$\left\{ -a^4 + (b^2 - c^2)^2, a^4 - b^4 - 2a^2c^2 + c^4, a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^4 \right\}$$

Cerchiamo il punto P nell'enciclopedia di Kimberling ², per vedere se si tratta di un punto conosciuto

Kimberling [ptP]

-5.6766194109

In effetti, mediante una semplice ricerca, possiamo constatare P coincide con il punto $X(4)$, ossia P è l'ortocentro del triangolo ABC .

Index	Coordinate	Rank	Coordinate
1	1.690308509457	63207	-678.377148462
2	2.629368792488	348	-468.904101327
3	6.782362894196	1105	-309.394308647
4	-5.67661941092	615	-228.134102794
5	0.552871741634	3191	-221.167529104
6	0.992908495065	3355	-169.876745382

ptH

$$\left\{ a^4 - (b^2 - c^2)^2, -a^4 + b^4 + 2a^2c^2 - c^4, -a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + c^4 \right\}$$

□

²<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>