
Problema 547

por César Beade Franco

Quincena del 15 al 18 de febrero de 2010

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S.El Sur, Huelva

■ Enunciado

Sea un triángulo ABC tal que $a > b > c$. Se escoge al azar un punto P en el interior del mismo. Determinar la probabilidad de que al escoger este punto al azar tengamos la desigualdad

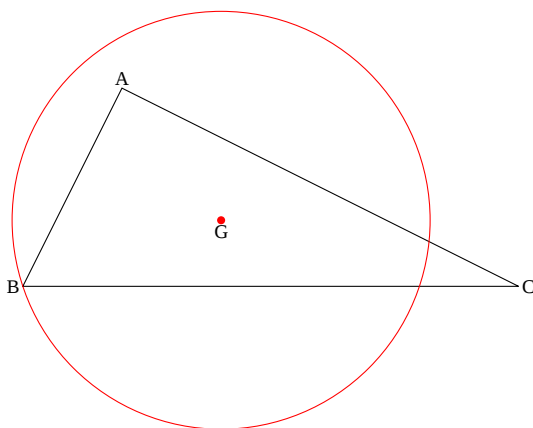
$$AP^2 + BP^2 + CP^2 > a^2 + c^2$$

■ Solución

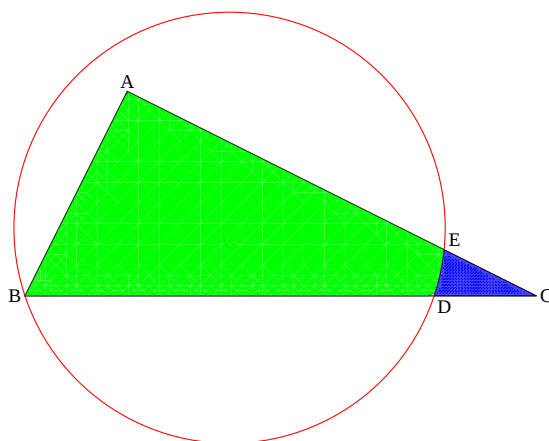
Primeramente determinaremos el lugar geométrico de los puntos P que cumplen la igualdad $AP^2 + BP^2 + CP^2 = a^2 + c^2$.

Siempre es posible disponer el triángulo de modo que $B=(0,0)$, $C=(1,0)$ y $A=(p,q)$ y que respete el orden de medidas del enunciado. Así $a^2 = BC^2 = 1$ y $c^2 = BA^2 = p^2 + q^2$.

Tomando un punto $P(x,y)$ y calculando AP^2 , BP^2 y CP^2 , la igualdad anterior queda $(x-p)^2 + (y-q)^2 + x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 1 + p^2 + q^2$, y reordenando queda $3x^2 + 3y^2 - 2(1+p)x - 2qy = 0$. Resulta ser una circunferencia con centro $(\frac{p+1}{3}, \frac{q}{3})$, es decir, el baricentro del triángulo y que pasa por B. La situación gráfica es



Los puntos que cumplen la desigualdad verifican $3x^2 + 3y^2 - 2(1+p)x - 2qy > 0$ y son exteriores al círculo. Si además son interiores al triángulo pertenecerán a la región CDE del dibujo



La probabilidad de extraer un punto al azar de cada región coloreada vendrá dada por el cociente entre las áreas de dicha región y del triángulo ABC.

Otra cuestión es el cálculo efectivo de esas áreas en función del punto $A(p,q)$.

■ Nota

El cálculo exacto de dicha área mediante integración le resultaba excesivo hasta al "*Mathematica*", aunque debe haber atajos.

También se podría preguntar si AB no acabaría cortando a la circunferencia del dibujo, lo que añadiría otra región a considerar. Eso lo impide la ordenación de los lados. Cuando $a = b$ (isósceles) el punto A está sobre la circunferencia y dicha probabilidad es máxima para un ángulo C dado y si $b = c$ (otro isósceles) todo el triángulo es interior y dicha probabilidad es cero, (deducciones gráficas que habría que probar).