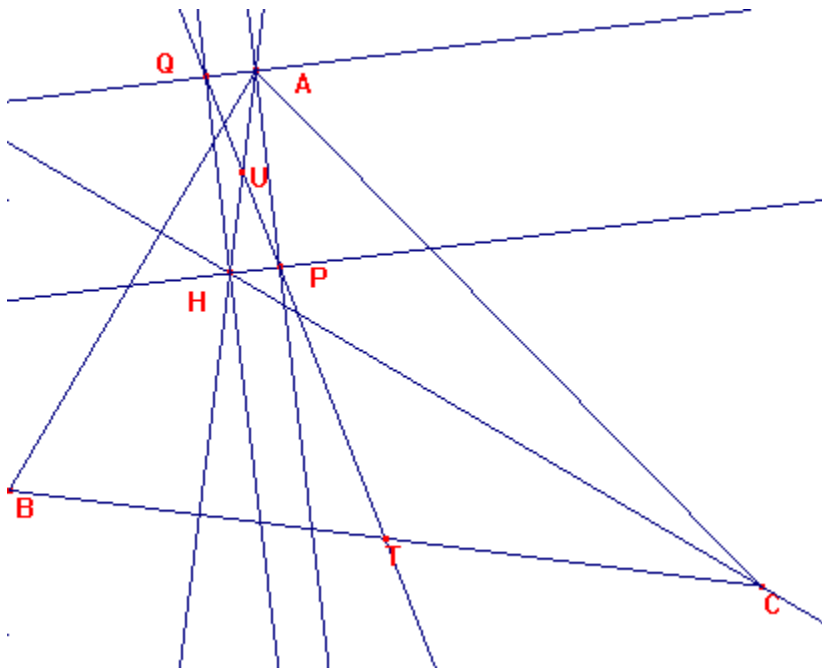


Problema 548.- (Propuesto por Gennaro Rispoli, Salerno, Italia)

El triángulo ABC tiene ortocentro H . Los pies de las perpendiculares desde H a las bisectrices interna y externa del ángulo BAC (que no es recto) son P y Q . Demostrar que PQ pasa por el punto medio de BC .

Gardiner, A; *The mathematical Olympiad Handbook*, Oxford University Press, New York, 19876 (pág, 60).

Solución del director



$AQPH$ es un rectángulo.

Sea U el corte de las diagonales.

U es el centro del rectángulo, y centro de la circunferencia circunscrita al mismo.

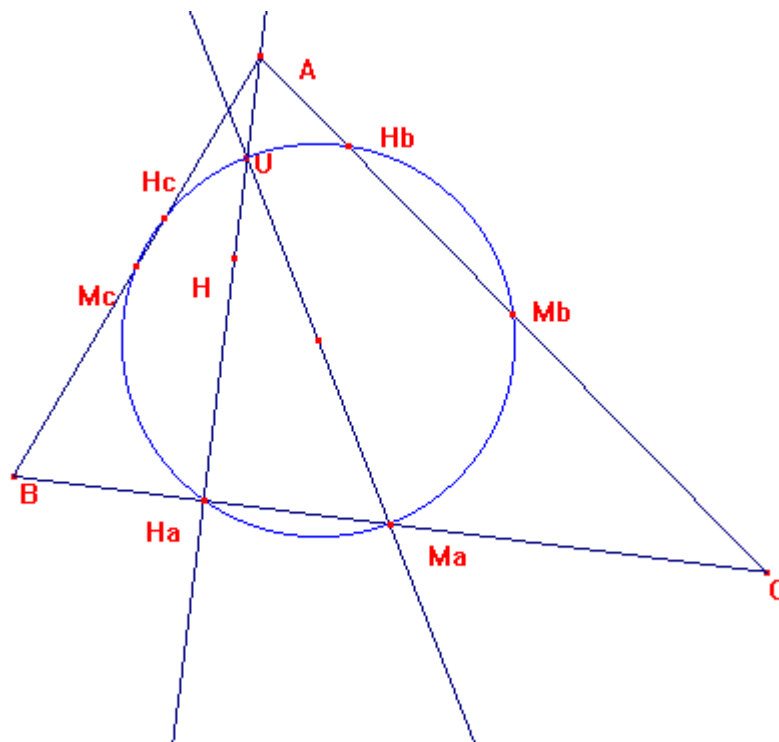
Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\angle BAC > \angle ABC > \angle BCA$.

Es por tanto, $\angle CAP = A/2$, $\angle BAH = 90 - B$, $\angle HAP = A/2 - (90 - B)$, $\angle HUP = A + 2B - 180$.

Además, siendo T el punto de corte del lado BC con la recta PQ , y H_a el pie de la altura sobre el lado BC , es

$$\angle BTU = \angle H_a TU = 180 - \angle TH_a U - \angle TUH_a = 180 - 90 - (A + 2B - 180) = 270 - A - 2B.$$

Por otra parte, siendo M_a el punto medio de BC , U , H_a y M_a son puntos de la circunferencia de los nueve puntos.



Es $\angle BH_aH_c = A$, por lo que $\angle H_cM_aU = \angle H_cH_aU = 90 - A$.

Además $\angle H_cM_aH_a = \angle H_cH_bH_a = 180 - 2B$.

Así, es $\angle UM_aH_a = \angle H_cM_aU + \angle H_cM_aH_a = 90 - A + 180 - 2B = 270 - A - 2B$

Es decir, cqd, $T = M_a$

Ricardo Barroso Campos
Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Sevilla