

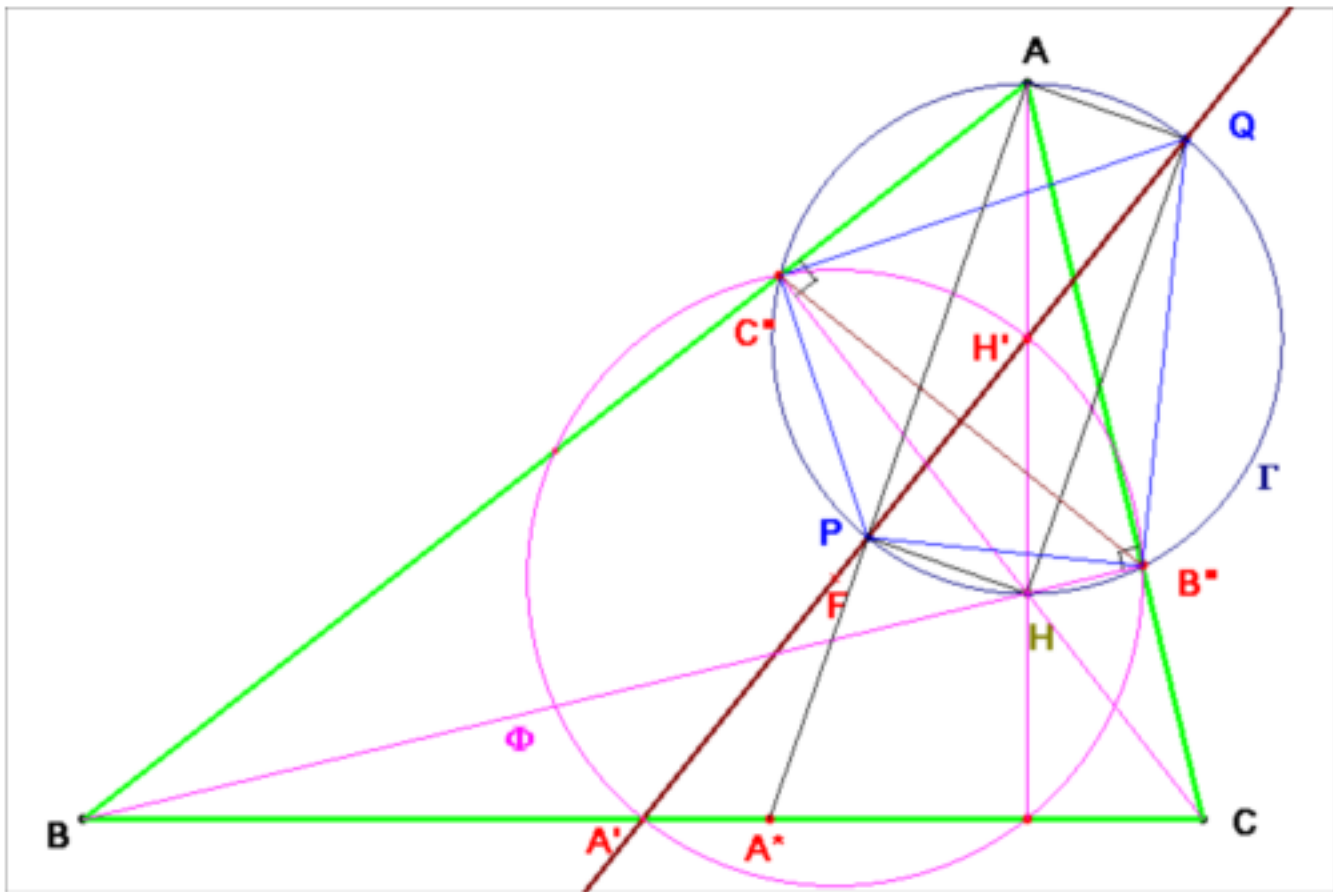
Problema 548

Problema IR 5

3.- El triángulo ABC tiene ortocentro H. Los pies de las perpendiculares desde H a las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle BAC$ (que no es recto) son P y Q. Demostrar que PQ pasa por el punto medio de BC

Gardiner A., The Mathematical Olympiad Handbook, Oxford University Press, New York, 1987b (pag. 60)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S. Fray Luis de León de Salamanca.



El rectángulo APHQ está inscrito en la circunferencia Γ de diámetro AH y centro H' . En ella están también los pies B'' y C'' de las alturas desde B y C respectivamente, que junto con H' son puntos de la circunferencia Φ de Feuerbach o de los 9 puntos. En ésta, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos de altura son diametralmente opuestos. Pues, si se toma el circuncentro O como origen de los vectores tenemos: $OH = 2OF = OA + OB + OC$, $2OA' = OB + OC$, $2OH' = OA + OH$, y de aquí $2(FA' + FH') = 2(OA' + OH' - 2OF) = OB + OC + OA + OH - 2OH = 0$, que prueba que FA' y FH' son opuestos.

Bastará probar que PQ contiene al centro F de la circunferencia de los 9 puntos para asegurar que contiene al punto A' . Para ello es suficiente que el eje radical $B''C''$ de las circunferencias Γ y Φ sea perpendicular a PQ.

Se tiene que $\angle PQB'' = \angle PAB'' = \angle BAC/2$ y también $\angle PQC'' = \angle PAC'' = \angle BAC/2$. Los triángulos rectángulos PQC'' y PQB'' son iguales, simétricos respecto a PQ. Por tanto PQ es perpendicular a $B''C''$ y necesariamente contiene a F. ■