

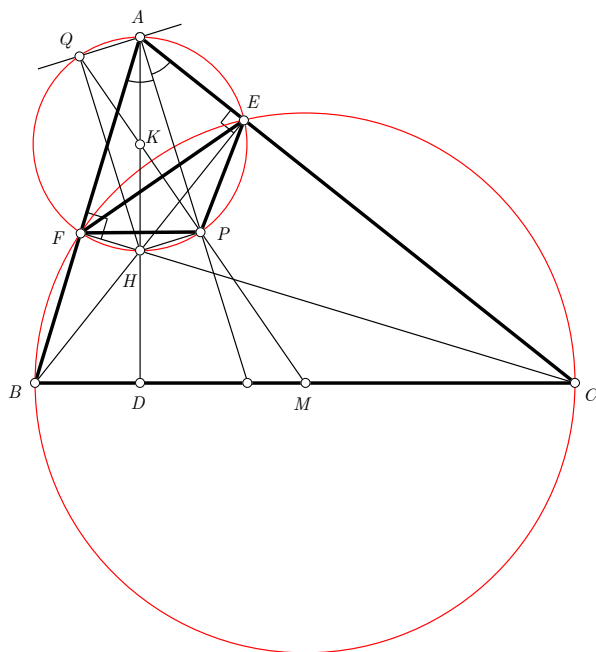
Problema 548.

El triángulo ABC tiene ortocentro H . Los pies de las perpendiculares desde H a las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle BAC$ (que no es recto) son P y Q . Demostrar que PQ pasa por el punto medio de BC .

Gardiner A., The Mathematical Olympiad Handbook, Oxford University Press, New York, 1987b (pag. 60)

Propuesto por Gennaro Rispoli, profesor de matemáticas en el Liceo Scientifico Sperimentale annesso al Liceo Ginnasio "T.L. Caro", 84087 Sarno (Salerno), Italia.

Soluzione di Sebastiano Mosca ed Ercole Suppa.



Siano AD , BE , CF le altezze di $\triangle ABC$ e siano rispettivamente K ed M i punti di intersezione di PQ con AH e BC , come indicato in figura.

I punti Q , F , H , P , E , A appartengono alla circonferenza di centro K e diametro PQ in quanto

$$\angle AQH = \angle AFH = \angle HPA = \angle HEA = 90^\circ$$

Dato che AP è la bisettrice di $\angle BAC$ abbiamo

$$\angle FAP = \angle PAE \quad \Rightarrow \quad PF = PE$$

e quindi P appartiene all'asse di EF . Dato che anche K appartiene all'asse di EF , ne segue che PK ($=PQ$) è l'asse di EF .

Per concludere la dimostrazione basta osservare che i punti E ed F giacciono sulla circonferenza di diametro BC e quindi la retta PQ , essendo asse di EF , passa per il punto medio di BC che è il centro di detta circonferenza. $\square$