Dado el triángulo $\widehat{ABC}$, hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que el ángulo $\hat{X}$ de su triángulo ceviano $\widehat{XYZ}$ es recto. Comprobar que el conjugado isogonal de dicho lugar geométrico es una cónica y construirla a partir del triángulo $\widehat{ABC}$.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **552**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

> *Dado el triángulo ABC, hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que el ángulo X de su triángulo ceviano XYZ es recto. Comprobar que el conjugado isogonal de dicho lugar geométrico es una cónica y construirla a partir del triángulo ABC.*
>
> *Garcia, FJ (2010). Comunicación personal*

—— - ——

Utlizaremos la expresión de ortogonalidad de rectas, $p_ix + q_iy + r_iz = 0$ $(i = 1, 2)$, en coordenadas baricéntricas referidas al triángulo $\widehat{ABC}$(1):

$$S_A(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) + S_B(r_1 - p_1)(r_2 - p_2) + S_C(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) = 0,$$

usando la notación de Conway, $S_\theta = S \operatorname{cotag} \theta$, siendo S el doble del área de $\widehat{ABC}$.

Dado un punto $P(u : v : w)$, los vértices de su triángulo ceviano son:

$$X(0 : v : w), \qquad Y(u : 0 : w), \qquad Z(u : v : 0).$$

Por lo que tenemos las ecuaciones de las rectas:

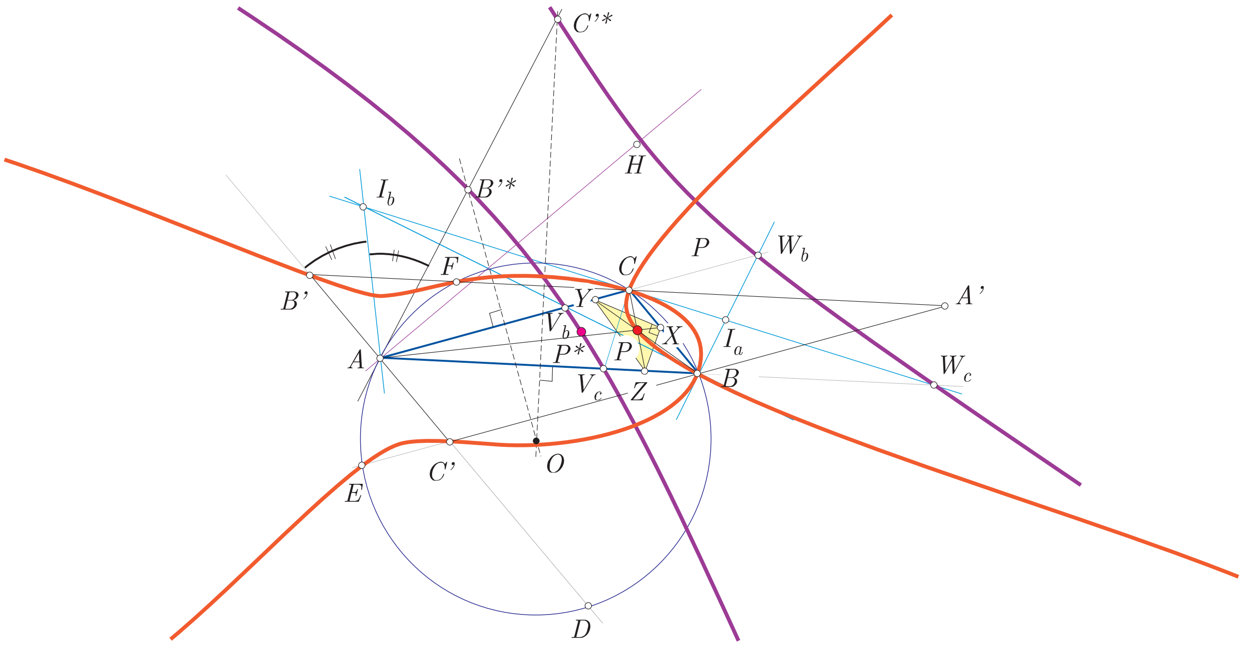
$$XY : \ vwx + uwy - uvz = 0, \qquad XZ : \ vwx - uwy + uvz = 0.$$

La condición para que éstas sean perpendiculares da que P ha de pertenecer a la cuártica:

$$\mathcal{C}_a : \ a^2y^2z^2 - b^2z^2x^2 - c^2x^2y^2 - 2S_Ayzx^2 = 0.$$

La curva conjugada isogonal de esta cuártica es la cónica (hipérbola, ver más abajo):

$$\mathcal{H}_a : \ b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 - 2a^2S_Ayz = 0.$$



(1) Fco. Javier García Capitán.- Giros con baricéntricas. 2006.
(www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol309garcap/sol309garcap.pdf)
Paul Yiu.- Introduction to Geometry of the Triangle. §4.5, pág. 54.
(http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps)
Angel Montesdeoca.- Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. §12, pág. 30.
(http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf#perp)

Para construir la hipérbola $\mathcal{H}_a$ vamos a determinar una serie de puntos, deducidos de $\widehat{ABC}$, por donde pasa, que (aparte de que tiene un foco en A y su eje focal es la altura de $\widehat{ABC}$ por A) serán más que suficientes para determinarla.

La hipérbola $\mathcal{H}_a$ pasa por los pies de las bisectrices interiores y exteriores en los vértices B y C:

$$V_b(a:0:-c), \qquad W_b(a:0,c), \qquad V_c(a:-b:0), \qquad W_c(a:b:0).$$

Además, contiene a puntos conjugados isogonales de puntos de la cuártica $\mathcal{C}_a$, para ello vamos a estudiar ésta con más detalle.

$\mathcal{C}_a$ tiene tres puntos dobles: los vértices de $\widehat{ABC}$, siendo las tangentes en B y C las bisectrices interiores y exteriores, el vértice A es un punto aislado. Esto significa que número de puntos dobles que puede tener $\binom{4-1}{2}$, coincide con los que realmente tiene, es decir, es de género cero; por tanto se puede parametrizar[(2)] mediante funciones racionales (unicursal).

Los vértices $B'(1:-1:1)$ y $C'(1:1:-1)$ del triángulo anticomplementario de $\widehat{ABC}$ están en $\mathcal{C}_a$. Además sus lados $A'B'$ y $A'C'$ la cortan en los puntos (que están en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$):

$$E(c^2-a^2:b^2:a^2-c^2), \qquad F(b^2-a^2:a^2-b^2:c^2).$$

Los puntos conjugados isogonales de E y F son los puntos del infinito de la hipérbola $\mathcal{H}_a$, de asíntotas:

$$2c^2b^2x-\left(\left(a^2-b^2\right)^2-\left(a^2+b^2\right)c^2\right)y+2b^2S_Bz=0, \qquad 2b^2c^2x+2c^2S_Cy-\left(\left(a^2-c^2\right)^2-b^2\left(a^2+c^2\right)\right)z=0.$$

Otros dos puntos de $\mathcal{H}_a$ son los conjugados isogonales de B' y C':

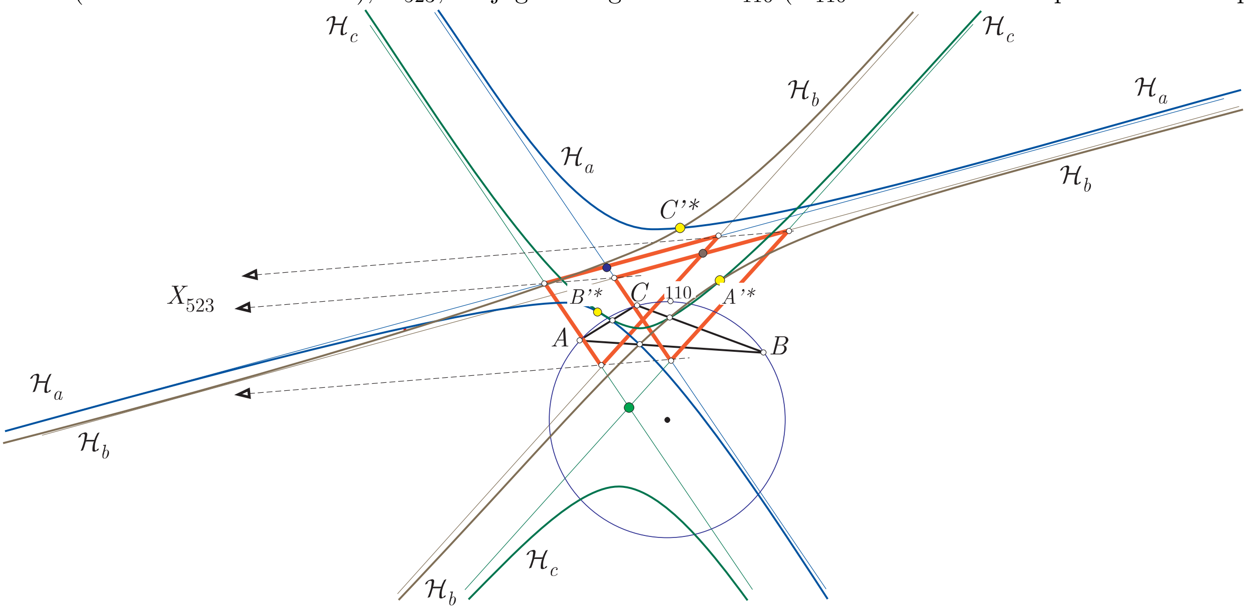
$$B'^*\left(\frac{1}{a^2}:-\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}\right), \qquad C'^*\left(\frac{1}{a^2}:\frac{1}{b^2}:-\frac{1}{c^2}\right).$$

Estos puntos se obtienen, respectivamente, como intersección de las mediatrices a AC y a AB con la recta simétrica de $B'C'$ respecto a la bisectrices en A a $\widehat{ABC}$.

OBSERVACIÓN

La conjugada isogonal de la cuártica lugar geométrico de los puntos tales que su triángulo ceviano $\widehat{XYZ}$ es rectángulo en Y, es la hipérbola: $\mathcal{H}_b:\ c^2a^2y^2-b^2a^2z^2-b^2c^2x^2-2b^2S_Bzx=0$.
Análogamente, obtenemos la hipérbola: $\mathcal{H}_c:\ a^2b^2z^2-c^2b^2x^2-c^2a^2y^2-2c^2S_Cxy=0$.

Los dos triángulos formados por las asíntotas de las tres hipérbolas, $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$, tomando una de cada hipérbola, de tal forma que no sean paralelas dos a dos, se obtienen uno de otro mediante una traslación de dirección la del punto del infinito $(b^2-c^2:c^2-a^2:a^2-b^2)$, X_{523}, conjugado isogonal del X_{110} (X_{110} es el centro de la parábola de Kiepert).



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2419.pdf

(2) Para parametrizar la curva algebraica dada implícitamente por: $a^2y^2z^2-b^2z^2x^2-c^2x^2y^2-2S_Ayzx^2=0$, consideremos (ver http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/curvasgr.pdf, §8, pág. 18-19) el haz de cónicas circunscritas a $\widehat{ABC}$ y tangentes a una rama de la curva en el vértice B (la bisectriz interior): $cxy-ayz+\lambda xz=0$.
Entre estas ecuaciones obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$x=\frac{a}{b^2c+\lambda(c\lambda-2S_A)}, \qquad y=\frac{1}{2c\lambda-2S_A}, \qquad z=\frac{1}{b^2-\lambda^2}.$$