

Problema 552 de triángulos cabri. Dado el triángulo ABC , hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que el ángulo X de su triángulo ceviano XYZ es recto. Comprobar que el conjugado isogonal de dicho lugar geométrico es una cónica y construirla a partir del triángulo ABC .

Propuesto por Francisco Javier García Capitán.

Solución de Francisco Javier García Capitán. Usando coordenadas bari-céntricas vemos que el lugar geométrico buscado es una cuártica:

```
<< Baricentricas` ;
ptP = {x, y, z};
{ptX, ptY, ptZ} = TrianguloCeviano [ptP];
locusP = Numerator[
  Factor[CuadradoDistancia [ptY, ptX] +
    CuadradoDistancia [ptX, ptZ] - CuadradoDistancia [ptY, ptZ]]
]
2 (c^2 x^2 y^2 - a^2 x^2 y z + b^2 x^2 y z + c^2 x^2 y z + b^2 x^2 z^2 - a^2 y^2 z^2)
```

El conjugado isogonal de un punto $P = (x : y : z)$ sobre esta cuártica será el punto $Q = (a^2/x : b^2/y : c^2/z)$. Para hallar el lugar geométrico que describe Q al variar P sobre la cuártica, hacemos

```
locusQ = Sustituirxyz [locusP, ConjugadoIsogonal [{x, y, z}]]
- 2 a^2 b^2 c^2 x^2 y^2 z^2 (b^2 c^2 x^2 - a^2 c^2 y^2 + a^4 y z - a^2 b^2 y z - a^2 c^2 y z - a^2 b^2 z^2)
```

Nos interesa la expresión del paréntesis, que efectivamente corresponde a una cónica, ya que es un polinomio de segundo grado. Para determinar la cónica necesitamos cinco puntos de la misma.

Haciendo $z = 0$ en la ecuación

$$b^2 c^2 x^2 - a^2 c^2 y^2 + a^4 y z - a^2 b^2 y z - a^2 c^2 y z - a^2 b^2 z^2 = 0 \quad (1)$$

resulta $c^2(b^2 x^2 - a^2 y^2) = 0$, es decir obtenemos que los puntos $C' = (a : b : 0)$ e $C'' = (-a : b : 0)$, es decir los pies sobre AB de las bisectrices del ángulo C . Lo mismo ocurre con los pies B', B'' de las bisectrices del ángulo B . Esto nos da ya cuatro puntos sobre la cónica.

Si ahora hallamos los puntos de intersección de la cónica (1) con la recta del infinito $x + y + z = 0$ obtenemos los puntos

$$V = (-a^2 : a^2 - c^2 : c^2), \quad W = (-a^2 : b^2 : a^2 - b^2).$$

Observemos que V es el punto del infinito de la recta $c^2 x + a^2 z = 0$, y que esta recta une el vértice $B = (0 : 1 : 0)$ con el vértice $T_c = (a^2 : b^2 : -c^2)$ del

triángulo tangencial, por tanto, esta recta es la tangente a la circunferencia circunscrita en el vértice B .

De esta manera obtenemos que nuestra cónica tiene por asíntota una recta paralela a la tangente por B a la circunferencia circunscrita. Por simetría, la otra asíntota será paralela a la tangente por C a la circunferencia circunscrita.

Ya tenemos seis puntos para construir la cónica. Teniendo en cuenta que *Cabri* necesita cinco puntos ordinarios para construir una cónica, podemos usar el teorema de Pascal para construir un punto más de la cónica:

Construcción. *Dados los puntos A, B, C, D, E sobre una cónica, hallar otro punto F sobre esa cónica.*

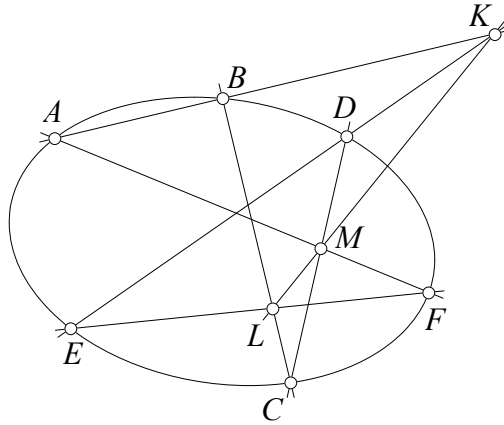


FIGURA 1

Solución. Procedemos de la siguiente manera:

1. Hallamos la intersección K de AB y DE
2. Tomamos un punto L cualquiera sobre la recta BC
3. Hallamos la intersección M de KL y CD .
4. El punto F de intersección de AM y EL está sobre la cónica.

Usamos esta construcción para hallar otro punto Q de la cónica (1), es decir, la cónica $B'B''VC'C''$. En este caso tenemos que $K = B'B'' \cap C'C'' = A$. Tomamos L arbitrario sobre la perpendicular a OB trazada por B'' . Hallamos la intersección M de AL y la perpendicular por C' a OB . Finalmente hallamos el punto Q de intersección de $B'M$ y $C''L$. Este punto estará sobre la cónica.

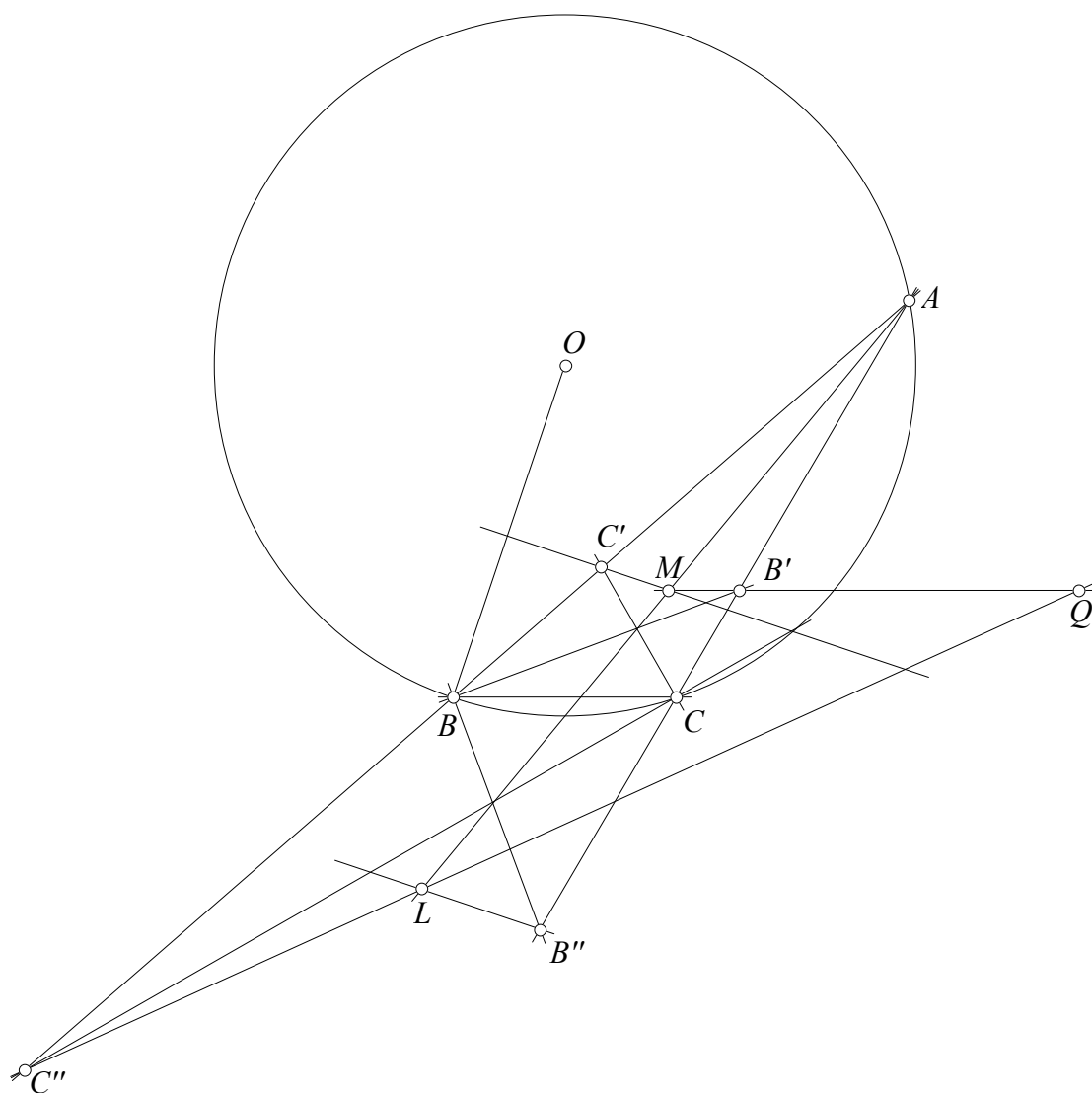


FIGURA 2

En la figura siguiente hemos construido además el conjugado isogonal del punto P y su triángulo ceviano, comprobando que es rectángulo en A .

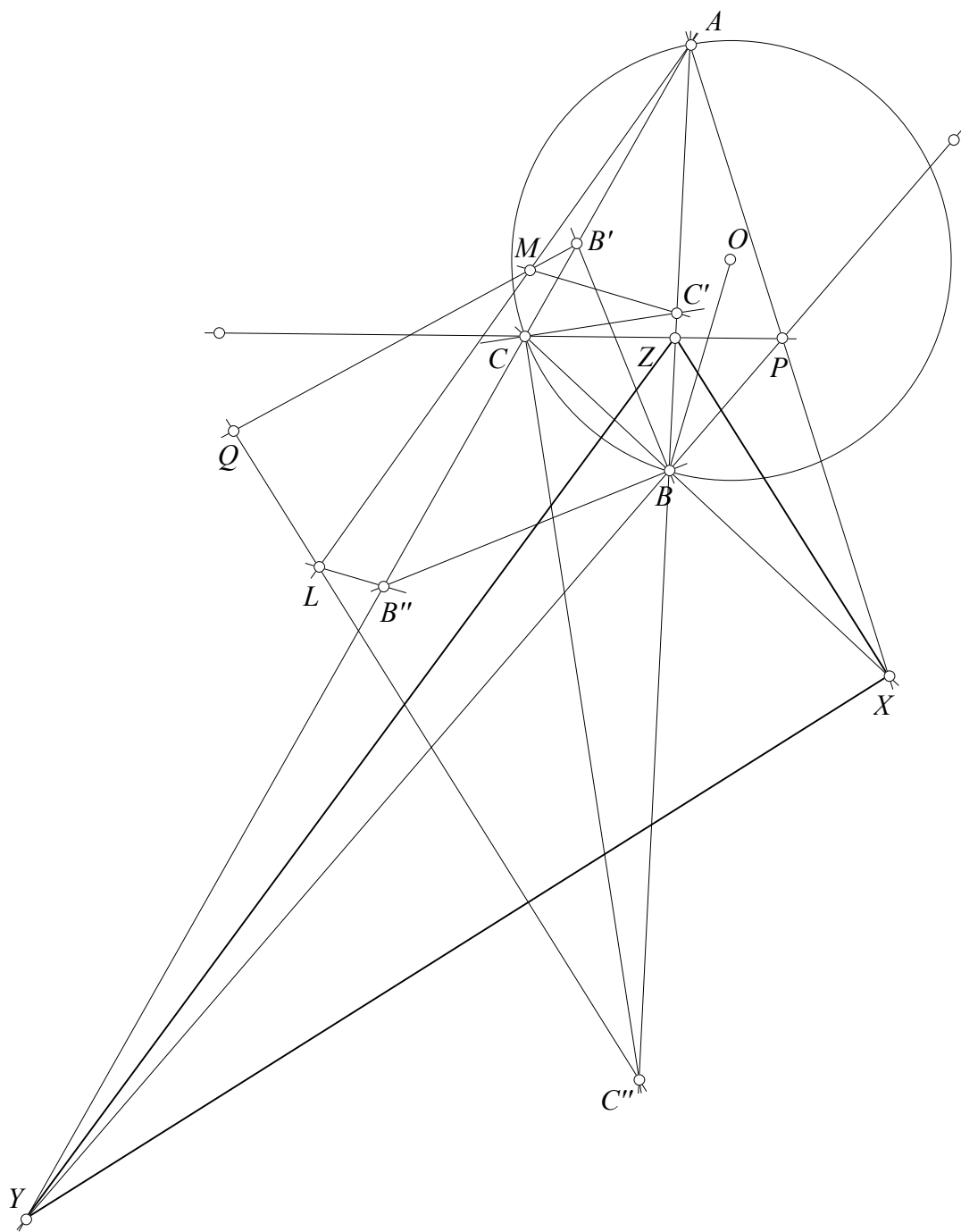


FIGURA 3

Observaciones:

1. Podemos comprobar que el centro Z de la cónica (1) está sobre la altura trazada por A y determinar que si D es el pie de dicha altura sobre el lado BC , entonces se cumple la relación

$$\frac{DZ}{ZA} = -\sin^2 A.$$

Para ello, hacemos

ptZ = Factor[CentroConica[Last[locusQ]]]

$\{-a^2 (a-b-c) (a+b-c) (a-b+c) (a+b+c), -2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 - c^2), 2 b^2 c^2 (-a^2 + b^2 - c^2)\}$

Det[{ptA, ptZ, ptH}]

0

RazonSimple[Pie[ptA, ptB, ptC], ptZ, ptA]

$$\frac{(-a+b-c) (a+b-c) (-a+b+c) (a+b+c)}{4 b^2 c^2}$$

2. La cónica (1) es siempre una hipérbola, excepto cuando el triángulo ABC es rectángulo en A , que es una parábola. Para comprobarlo calculamos el discriminante de la cónica:

DiscriminanteConica[Last[locusQ]]

$$\frac{1}{4} a^4 (a^2 - b^2 - c^2)^2$$