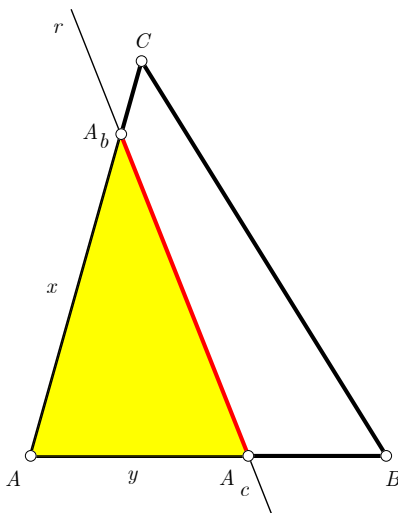


Problema 553.

Sea ABC un triángulo escaleno con $a > b > c$. Determinar el segmento de línea recta de longitud mínima que divide al mismo en dos partes de igual área.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

Soluzione di Ercole Suppa.



Consideriamo una retta r che interseca i lati AB e AC e divide il triangolo ABC in due parti aventi la stessa area. Indicati con $A_b = r \cap AC$ e $A_c = r \cap AB$ abbiamo:

$$[AA_bA_c] = \frac{1}{2}[ABC]$$

Pertanto, posto $AA_b = x$ ed $AA_c = y$ risulta:

$$\frac{1}{2}xy \sin A = \frac{1}{4}bc \sin A \quad \Rightarrow \quad xy = \frac{1}{2}bc \quad (1)$$

Dal teorema del coseno, tenendo conto di (1), abbiamo

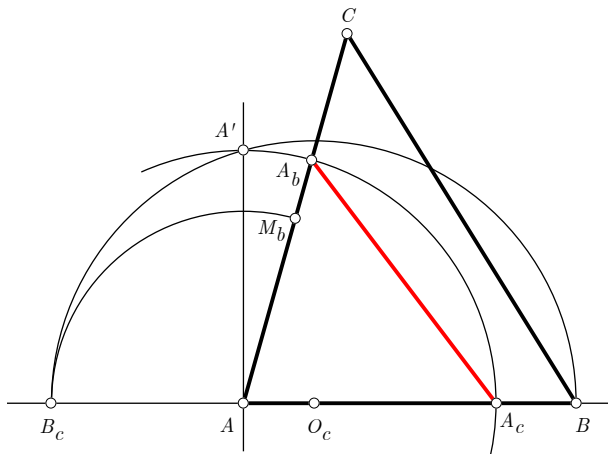
$$(A_bA_c)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A = x^2 + y^2 - bc \cos A \quad (2)$$

e, da questo, segue che A_bA_c ha lunghezza minima se e solo se $x^2 + y^2$ è minimo.

D'altra parte, poichè $x^2y^2 = \frac{1}{4}b^2c^2$ (=costante), l'espressione $x^2 + y^2$ è minima se e solo se $x^2 = y^2$, ossia se

$$x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

Pertanto il segmento A_bA_c di lunghezza minima, con $A_c \in AB$ e $A_b \in AC$, può essere ottenuto con riga e compasso con la seguente



COSTRUZIONE:

- determinare il punto medio M_b del lato AC ;
- sul prolungamento di AB dalla parte di A prendere il punto B_c tale che $AB_c = AM_b$;
- determinare il punto medio O_c del segmento B_cB ;
- tracciare la semicirconferenza γ di diametro B_cB (di centro O_c e raggio O_cB);
- determinare il punto A' di intersezione tra γ e la retta passante per A e perpendicolare a BC ;
- sui lati AB e AC determinare i punti A_c e A_b tali che $AA_b = AA_c = AA'$.

□

Determiniamo ora la lunghezza del segmento A_bA_c , ottenuto con la precedente costruzione. Indicando con s il semiperimetro di $\triangle ABC$, abbiamo:

$$\begin{aligned} (A_bA_c)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos A = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} - 2 \frac{1}{2} bc \cos a = \\ &= bc(1 - \cos A) = 2bc \sin^2 \frac{A}{2} = 2bc \frac{(s-b)(s-c)}{bc} = 2(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

e, pertanto

$$A_bA_c = \sqrt{2(s-b)(s-c)} \quad (3)$$

Ragionando in modo analogo si trova che i segmenti B_aB_c e C_aC_b (con $B_a, C_a \in BC$, $B_c \in AB$, $C_b \in AC$) che dividono il triangolo ABC in due parti aventi la stessa area, hanno lunghezze minime rispettivamente:

$$B_aB_c = \sqrt{2(s-a)(s-c)} \quad (4)$$

$$C_aC_b = \sqrt{2(s-a)(s-b)} \quad (5)$$

Da (3), (4) e (5), tenuto conto che $a > b > c$, si ottiene che il segmento di lunghezza minima che divide $\triangle ABC$ in due parti di ugual area è C_aC_b e può essere determinato con riga e compasso con una costruzione analoga a quella precedentemente illustrata. $\square$