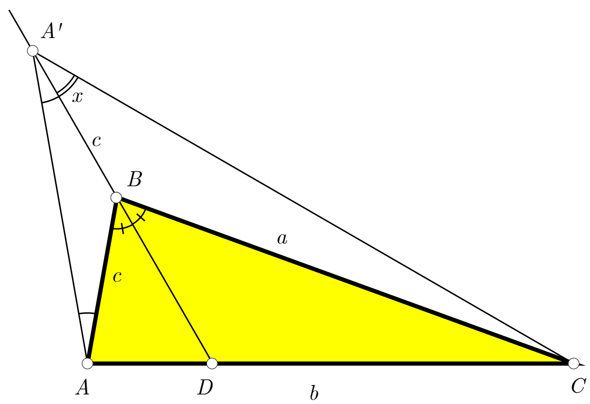
Problema 554.

En un triángulo ABC se tiene: $\angle BAC = 80°$, $\angle BCA = 20°$, y sea D el pie de la bisectriz del ángulo B. Demostrar que $DC = AB + BD$.

Propuesto por William Rodríguez Chamache, profesor de geometria de la 'Academia integral class' Trujillo-Perú.

Soluzione di Ercole Suppa.

Indichiamo rispettivamente con a, b, c le lunghezze dei lati BC, CA, AB del triangolo ABC.



Sul prolungamento di DB, dalla parte di B, prendiamo il punto A' tale che $BA' = BA$, come indicato in figura.

Detta x la misura dell'angolo $\angle BA'C$ si ha che $\angle BCA' = \angle DBC - x = 40° - x$ e quindi, per il teorema dei seni applicato al triangolo $A'BC$:

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{c}{\sin(40° - x)} \tag{1}$$

D'altra parte il teorema dei seni applicato al triangolo ABC implica che

$$\frac{a}{\sin 80°} = \frac{c}{\sin 20°} \tag{2}$$

Dalla (1) e la (2) discende che

$$
\begin{aligned}
\frac{a\sin(40^\circ - x)}{\sin x} &= \frac{a\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} && \Rightarrow\\
\sin 80^\circ \sin(40^\circ - x) &= \sin 20^\circ \sin x && \Rightarrow\\
\cos 10^\circ \sin(40^\circ - x) &= 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin x && \Rightarrow\\
\sin 10^\circ \cdot \cos(30^\circ - x) + \cos 10^\circ \cdot \sin(30^\circ - x) &= 2\sin 10^\circ \sin x && \Rightarrow\\
\sqrt{3}\sin 10^\circ \cos x + \sin 10^\circ \sin x + \cos 10^\circ \cos x - \sqrt{3}\cos 10^\circ \sin x &= 4\sin 10^\circ \sin x && \Rightarrow\\
\sqrt{3}\sin 10^\circ \left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) + \cos 10^\circ \left(\cos x - \sqrt{3}\sin x\right) &= 0 && \Rightarrow\\
\left(\sqrt{3}\sin 10^\circ + \cos 10^\circ\right)\left(\sin(x - 30^\circ)\right) = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad x = 30^\circ
\end{aligned}
$$

e quindi $\angle DA'C = 30^\circ$ e $\angle DCA' = \angle DCB + \angle BCA' = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$.

Pertanto, il triangolo $\triangle DA'C$ è isoscele sulla base $A'C$, per cui

$$DC = A'D = A'B + BD = AB + BD$$

e la dimostrazione è conclusa. $\square$