

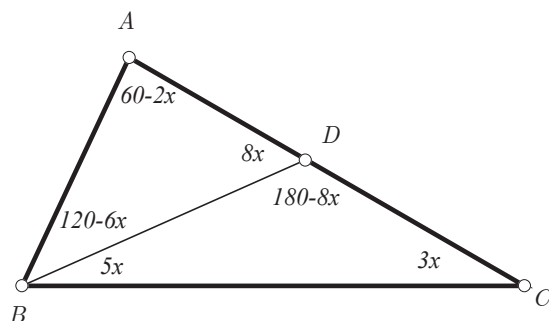
Problema 556.

En un triángulo ABC se tiene que $\angle BAC = 60^\circ - 2\beta$, $\angle BCA = 3\beta$. Se tiene D en el segmento AC tal que $AB = DC$ y que $\angle DBC = 5\beta$. Hallar β ?

Propuesto por William Rodríguez Chamache, profesor de geometría de "la Academia integral class Trujillo", Perú.

Soluzione di Ercole Suppa.

Per comodità poniamo $\beta = x$. Dal teorema dell'angolo esterno abbiamo $\angle ADB = 8x$ e, pertanto $\angle ABD = 120^\circ - 6x$, $\angle BDC = 180^\circ - 8x$, come indicato in figura.



Dal teorema dei seni applicato al triangolo ADB abbiamo

$$\frac{BD}{\sin(60^\circ - 2x)} = \frac{AB}{\sin(8x)} \Rightarrow BD = AB \cdot \frac{\sin(60^\circ - 2x)}{\sin(8x)} \quad (1)$$

Dal teorema dei seni applicato al triangolo BDC abbiamo

$$\frac{BD}{\sin(3x)} = \frac{DC}{\sin(5x)} \Rightarrow BD = DC \cdot \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} \quad (2)$$

Dalla (1) e la (2), tenuto conto che $AB = DC$, segue che

$$\frac{\sin(60^\circ - 2x)}{\sin(8x)} = \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} \Leftrightarrow \sin(60^\circ - 2x) \sin(5x) - \sin(8x) \sin(3x) = 0 \quad (3)$$

Risolvendo l'equazione (3) con MATHEMATICA¹ otteniamo le seguenti soluzioni:

$$\text{sols} = \frac{180}{\pi} x /. \# \& /@ \text{Flatten}[\text{NSolve}[\text{Sin}[\frac{\pi}{3} - 2x] \text{Sin}[5x] - \text{Sin}[3x] \text{Sin}[8x] == 0, x]]$$

¹Non sono riuscito a risolvere questa equazione in modo elementare ☹

$\{-180., -170., -160.641, -131.519 - 5.79511 \, i, -131.519 + 5.79511 \, i, -110.,$
 $-84.4752, -64.4854, -60., -50., -27.3606, 0., 10., 19.3592, 48.481 - 5.79511 \, i,$
 $48.481 + 5.79511 \, i, 70., 95.5248, 115.515, 120., 130., 152.639, 180.\}$

Poichè deve essere $0 < x < 20^\circ$, possiamo concludere che vi sono due valori di x per cui esiste un triangolo soddisfacente alle condizioni richieste

$$x = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{rad} \quad , \quad x = 19,3592^\circ$$

□

Osservazione. Possiamo verificare facilmente che $x = 10^\circ$ soddisfa l'equazione (3). Infatti sostituendo il valore $x = 10^\circ$ nel primo membro della (3) e tenendo presente che $\sin(50^\circ) = \cos(40^\circ)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} & \sin(40^\circ) \sin(50^\circ) - \sin(80^\circ) \sin(30^\circ) = \\ &= \sin(40^\circ) \sin(50^\circ) - \frac{1}{2} \cdot \sin(80^\circ) = \\ &= \sin(40^\circ) \sin(50^\circ) - \frac{1}{2} \cdot 2 \sin(40^\circ) \cos(40^\circ) = \\ &= \sin(40^\circ) \sin(50^\circ) - \sin(40^\circ) \cos(40^\circ) = 0 \end{aligned}$$