

Problema 557.

Para cualquier triángulo existen dos puntos tales que sus simétricos respecto los lados del triángulo forman un triángulo equilátero.

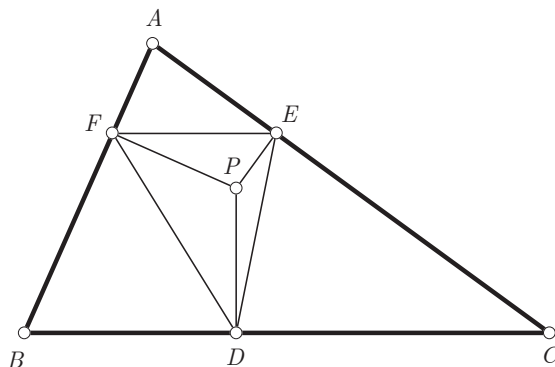
Propuesto por Nicolás Rosillo Departamento de Matemáticas, IES Máximo Laguna (Santa Cruz de Mudela, Ciudad Real) y Francisco Javier García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)

Soluzione di Ercole Suppa.

Osserviamo preliminarmente che il triangolo pedale di un punto P è equilatero se e solo se P soddisfa la condizione del problema: infatti con un'omotetia di centro P e rapporto 2 il triangolo pedale DEF si trasforma nel triangolo $\triangle A'B'C'$, dove A', B', C' sono i simmetrici di P rispetto ai lati di $\triangle ABC$.

Pertanto, il problema proposto può essere riformulato nel modo seguente:

Dato un qualsiasi triangolo dimostrare che esistono due punti tali che il relativo triangolo pedale è equilatero.



Se $\triangle DEF$ è il triangolo pedale di un punto P allora i quadrilateri $AEPF$, $BFPD$, $CDPE$ sono ciclici, quindi

$$EF = PA \sin A, \quad FD = PB \sin B, \quad DE = PC \sin C$$

e da queste relazioni segue che $\triangle DEF$ è equilatero se e solo se:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}, \quad \frac{PC}{PA} = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}, \quad \frac{PA}{PB} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a} \quad (1)$$

E' noto che il luogo dei punti P per cui è costante il rapporto delle distanze da due punti fissi è una circonferenza, detta *circonferenza di Apollonio*.

Pertanto i punti P soddisfacenti le relazioni (1) formano tre circonferenze γ_a , γ_b , γ_c , chiamate rispettivamente A -circonferenza di Apollonio, B -circonferenza di Apollonio, C -circonferenza di Apollonio, relative al triangolo ABC .

Poichè il primo rapporto è $\frac{AB}{AC}$, la circonferenza γ_a passa per A e per i punti X , X' , intersezioni delle bisettrici interna ed esterna dell'angolo $\angle A$ con il lato BC . Inoltre, poichè $\angle XAX' = 90^\circ$, il centro di γ_a è il punto medio di XX' .

I due cerchi γ_a e γ_b si intersecano in due punti I_1 , I_2 tali che

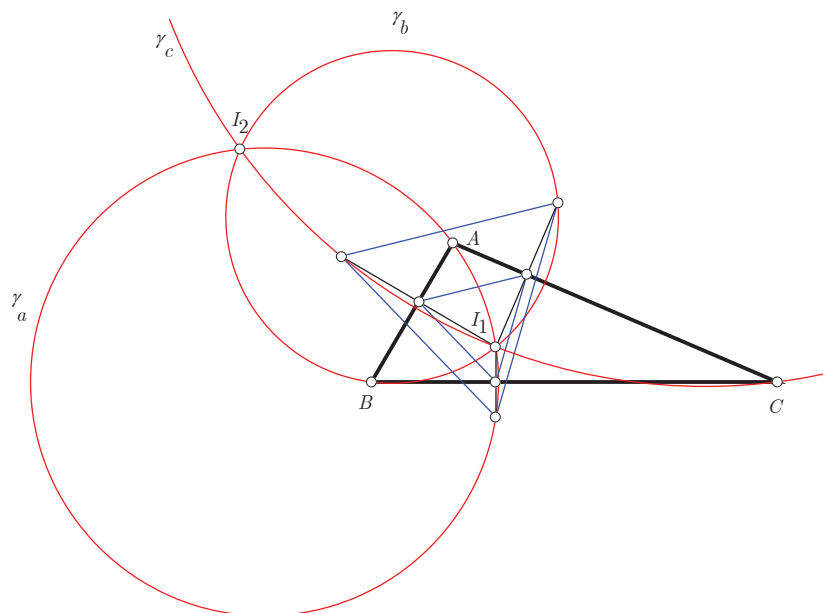
$$\frac{BI_1}{CI_1} = \frac{BI_2}{CI_2} = \frac{c}{b}, \quad \frac{CI_1}{AI_1} = \frac{CI_2}{AI_2} = \frac{a}{c} \quad (2)$$

Dalla (2) segue che

$$\frac{AI_1}{BI_1} = \frac{AI_2}{BI_2} = \frac{b}{a}$$

e questo implica che I_1 , I_2 appartengono anche a γ_c e che, quindi, i tre cerchi γ_a , γ_b , γ_c sono coassiali.

I punti I_1 , I_2 sono chiamati *punti isodinamici*¹ del triangolo ABC ed i loro triangoli pedali sono entrambi equilateri.



Nella figura è rappresentato il triangolo pedale di I_1 e il triangolo avente come vertici i simmetrici di I_1 rispetto alle rette BC , CA , AB . □

¹I punti I_1 ed I_2 sono indicati con $X(15)$ ed $X(16)$ in ETC.

Soluzione alternativa.

Utilizziamo coordinate baricentriche omogenee rispetto al triangolo $\triangle ABC$. I calcoli sono svolti con il programma MATHEMATICA mediante le routines contenute nel pacchetto `baricentricas.nb`, prelevabile dal sito di Francisco Javier García Capitán ².

Sia $P(x : y : z)$ un generico punto situato nel piano del triangolo ABC e siano A_1, B_1, C_1 i simmetrici di P rispetto alle rette BC, CA, AB .

```
<< Baricentricas`;
```

```
ptP = {x, y, z}
ptA1 = SimetriaAxial[ptP, ptB, ptC]
ptB1 = SimetriaAxial[ptP, ptA, ptC]
ptC1 = SimetriaAxial[ptP, ptB, ptA]
```

Determiniamo l'equazione del luogo γ_a dei punti P tali che $A_1B_1 = A_1C_1$:

```
eqn1 = Last[Factor[CuadradoDistancia[ptA1, ptB1] - CuadradoDistancia[ptA1, ptC1]]]
```

$$-a^2 c^2 x y - b^2 c^2 x y + c^4 x y - a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 x z - b^4 x z + b^2 c^2 x z + a^2 b^2 z^2$$

Determiniamo l'equazione del luogo γ_b dei punti P tali che $A_1B_1 = B_1C_1$:

```
eqn2 = Last[Factor[CuadradoDistancia[ptA1, ptB1] - CuadradoDistancia[ptB1, ptC1]]]
```

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 x y + b^2 c^2 x y - c^4 x y + a^4 y z - a^2 b^2 y z - a^2 c^2 y z - a^2 b^2 z^2$$

Le due curve γ_a, γ_b rappresentano rispettivamente le circonferenze di Apollonio³ relative ai vertici A e B del triangolo ABC :

$$\gamma_a : a^2 c^2 y^2 - a^2 b^2 z^2 + 2c^2 S_C xy - 2b^2 S_B xz = 0$$

$$\gamma_b : b^2 c^2 x^2 - a^2 b^2 z^2 + 2c^2 S_C xy - 2a^2 S_A yz = 0$$

Con l'aiuto del MATHEMATICA possiamo verificare facilmente che γ_a passa per A e per i punti X ed X' intersezione delle bisettrici interna ed esterna dell'angolo $\angle A$ con il lato BC :

```
ptX = Punto[Recta[ptA, ptI], Recta[ptB, ptC]];
ptX1 = Punto[Recta[ptA, ptIa], Recta[ptB, ptC]];
```

²<http://garciacapitan.auna.com/baricentricas/>

³Consultare il libro: *Angel Montesdeoca, Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos*, pag. 123. Il libro può essere scaricato gratuitamente dal sito dell'autore: <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf>

```
eqn1 /. Thread[{x, y, z} -> #] & /@ {ptA, ptX, ptX1}
```

```
{0, 0, 0}
```

Analogamente si può verificare che γ_b passa per B e per i punti Y, Y' intersezione delle bisettrici interna ed esterna dell'angolo $\angle B$ con il lato AC :

```
ptY = Punto[Recta[ptB, ptI], Recta[ptA, ptC]];
ptY1 = Punto[Recta[ptB, ptIb], Recta[ptA, ptC]];
eqn2 /. Thread[{x, y, z} -> #] & /@ {ptB, ptY, ptY1}
```

```
{0, 0, 0}
```

Determiniamo i punti di intersezione I_1, I_2 delle circonferenze γ_a, γ_b .

```
sols = {x, y, z} /. Simplify[Solve[{eqn1 == 0, eqn2 == 0, x + y + z == 1}, {x, y, z}]];
{ptI1, ptI2} = sols;
{Kimberling[ptI1], Kimberling[ptI2]}

{-6.78421150, 3.102444021}
```

Cerchiamo i punti I_1 e I_2 nell'enciclopedia di Kimberling⁴, per vedere se si tratta di punti conosciuti. In effetti, mediante una semplice ricerca, possiamo constatare $I_1 = X(16)$ =secondo punto isodinamico mentre $I_2 = X(15)$ =primo punto isodinamico.

Index	Coordinate
13	0.075945151804
14	4.373431772013
15	3.102444020654
16	-6.78421149583
17	1.386654550069
18	-16.2806739977

I punti isodinamici $X(15)$ e $X(16)$ sono gli unici punti tali che il triangolo pedale rispetto ad $\triangle BAC$ risulta equilatero. $\square$

Osservazione. I punti isodinamici I_1 e I_2 hanno coordinate baricentriche

$$X(15) = \left(a \sin \left(A + \frac{\pi}{3}\right) : b \sin \left(B + \frac{\pi}{3}\right) : c \sin \left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$X(16) = \left(a \sin \left(A - \frac{\pi}{3}\right) : b \sin \left(B - \frac{\pi}{3}\right) : c \sin \left(C - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Si osservi che $X(16)$ non è definito se $\triangle ABC$ è equilatero.

⁴<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>

