Problema 558.

Dado un triángulo A1 B1 C1, encontrar otro ABC tal que los simétricos de sus vértices respecto del lado opuesto, coincidan con los vértices A1 B1 C1 del primero.

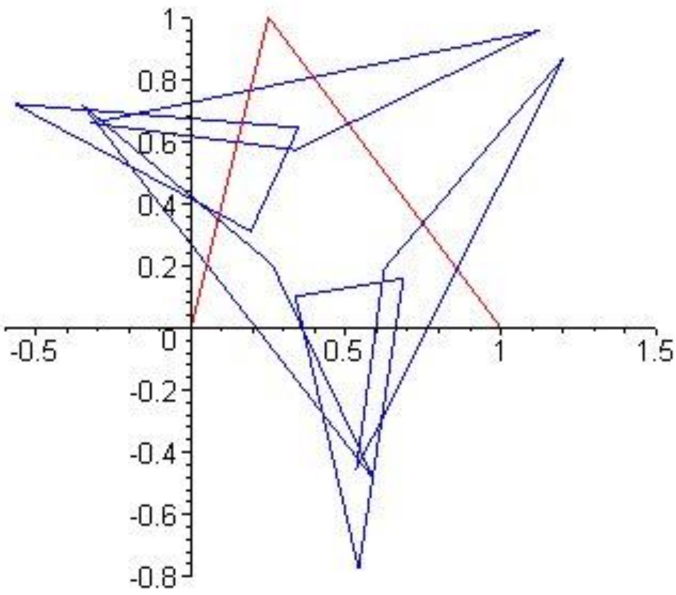
Sánchez, M. (1992): Algunos problemas de matemática elemental. (Discurso de ingreso en el IEG) Boletín del Instituto de Estudios Giennenses.

Solución de Nicolás Rosillo (nicolasrosillo@gmail.com)

<u>Solución numérica.</u>

El sistema de cómputo algebraico Maple permite obtener las soluciones a este problema. Se generan dos funciones en relación a la perpendicularidad de dos segmentos y la colinealidad de tres puntos. Acto seguido se genera un sistema de seis ecuaciones en las que el triangulo A1B1C1 usado será siempre de tipo (0,0), (1,0), (m,n). Así, para un triángulo inicial (0,0), (1,0), (0.25,1) Maple devuelve cinco soluciones. Trabajamos con 0.25 en vez de ¼ para que Maple trabaje en coma flotante y evitar tener que evaluar numéricamente las salidas *RootOf* que devolvería si trabajara en aritmética exacta.

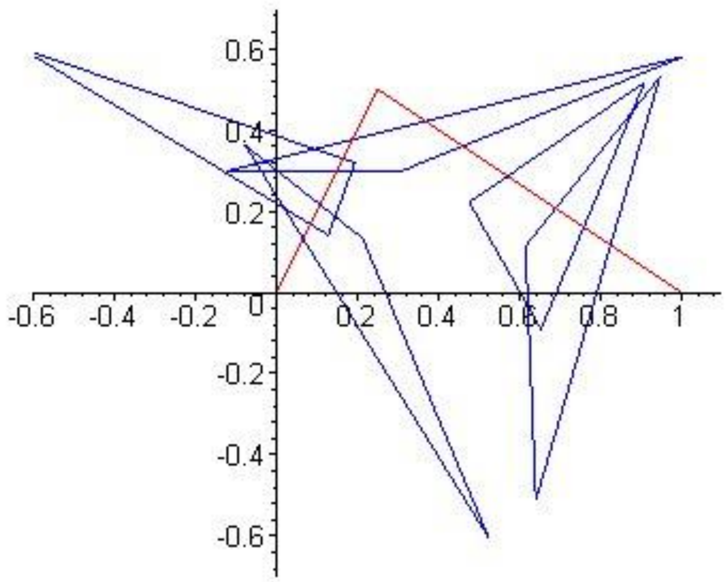
```
> Perpendicular:=(a,b,c,d,e,f,g,h)->(a-c)*(e-g)+(b-d)*(f-h):
> Collinear:=(a,b,c,d,e,f)->(a-c)*(d-f)-(c-e)*(b-d):
> solve({Collinear(a,b,c,d,(e+1)*(1/2),(1/2)*f)=0,Collinear(a,b,e,f,(0.25+c
  )*(1/2),(1+d)*(1/2))=0,Collinear(c,d,e,f,(1/2)*a,(1/2)*b)=0,Perpendicular
  (a,b,c,d,1,0,e,f)=0,Perpendicular(a,b,e,f,0.25,1,c,d)=0,Perpendicular(c,d
  , e,f,0,0,a,b)=0},{a,b,c,d,e,f});
{b = f, e = e, f = f, c = e, d = f, a = e},
  {e = .6231217706, a = .5340647356, f = .1900386054, b = -.4553018141, c = 1.201669414, d = .8686695367},
  {c = .5413447696, b = .1589635190, f = .1019291039, d = -.7770568837, a = .6853495120, e = .3374682026},
  {b = .2041525186, a = .2618873670, e = .5905809501, d = .7160037776, c = -.3476393443, f = -.4875475886},
  {a = .8096683030 - .3332401146 I, e = .2588380641 - .1992388546 I, c = .5367380564 - .1391638747 I,
  b = .6432989799 - .2470882367 I, d = .1532781263 - .1544431442 I, f = .5080762930 - .08651231171 I}, {
  e = .2588380641 + .1992388546 I, c = .5367380564 + .1391638747 I, a = .8096683030 + .3332401146 I,
  b = .6432989799 + .2470882367 I, d = .1532781263 + .1544431442 I, f = .5080762930 + .08651231171 I},
  {d = .3121822355, b = .6457806538, f = .7212949265, a = .3466387269, c = .1932683124, e = -.5689000219},
  {e = 1.125052970, a = -.3222769475, f = .9581323668, c = .3378807357, b = .6598071630, d = .5736450814}
```



Para un triángulo inicial (0,0), (1,0), (0.25,0.5) Maple devuelve otras cinco soluciones.

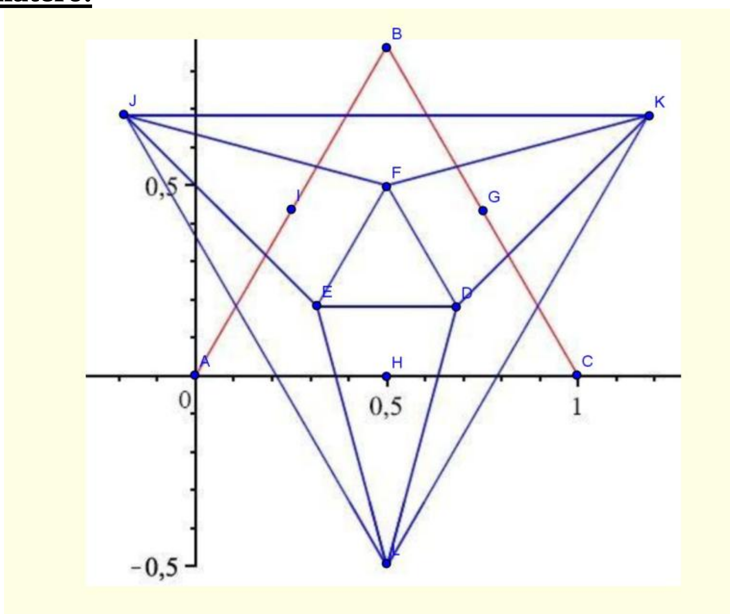
```
> Perpendicular:=(a,b,c,d,e,f,g,h)->(a-c)*(e-g)+(b-d)*(f-h):
> Collinear:=(a,b,c,d,e,f)->(a-c)*(d-f)-(c-e)*(b-d):
> solve({Collinear(a,b,c,d,(e+1)*(1/2),(1/2)*f)=0,Collinear(a,b,e,f,(0.25+c
  )*(1/2),(0.5+d)*(1/2))=0,Collinear(c,d,e,f,(1/2)*a,(1/2)*b)=0,Perpendicul
  ar(a,b,c,d,1,0,e,f)=0,Perpendicular(a,b,e,f,0.25,0.5,c,d)=0,Perpendicular
  (c,d, e,f,0,0,a,b)=0},{a,b,c,d,e,f});
```

$\{d=f, c=e, a=e, b=f, f=f, e=e\},$
$\{a=.6403323629, e=.6145870063, b=-.5110796649, d=.5287010296, c=.9461060531, f=.1133403938\},$
$\{e=.5233023523, f=-.6034684969, b=.1322444542, a=.2122621102, c=-.07783430487, d=.3614002086\}$
$, \{b=.2473278574-.2848497591\,I, c=.5250570667-.02643840224\,I, a=.6454971945-.09834597490\,I,$
$f=.1704543114-.1833926159\,I, d=-.1176300474-.3992152749\,I, e=.3174837752-.01362997063\,I\}, \{$
$f=.1704543114+.1833926159\,I, d=-.1176300474+.3992152749\,I, e=.3174837752+.01362997063\,I,$
$a=.6454971945+.09834597490\,I, c=.5250570667+.02643840224\,I, b=.2473278574+.2848497591\,I\},$
$\{c=.3010643090, b=.2987997786, e=1.004613567, a=-.1207354339, f=.5797247642, d=.2954430112\},$
$\{d=.1405940891, c=.1276348770, e=-.6281218094, f=.5984362419, a=.1931453141, b=.3188235545\},$
$\{f=.2210584742, c=.6529149324, b=.5165561628, e=.4756513339, a=.9090012577, d=-.09087824367\}$



0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Triangulo equilátero.



Dado un triángulo equilátero ABC, existen 7 triángulos tales que los simétricos de sus vértices respecto de sus lados generan el triangulo original. A saber: IGH, EJF, FJK, FKD, DKL, EDL y ELJ.

Excepto IGH cuya área es ¼ de la del triángulo original, el resto poseen área $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ la del triángulo original.

Además AEGK, BFHL y CDIJ están alineados.

A, E F y B pertenecen a la misma circunferencia, de centro J.

B, F, D y C pertenecen a la misma circunferencia, de centro K.

A, E, D y C pertenecen a la misma circunferencia, de centro L.

Para un triángulo inicial de vértices (0,0) (1,0) y (1/2, $\sqrt{3}/2$) los triángulos soluciones son, obtenidos en aritmética exacta con Maple,

$$\{b=\frac{1}{2}, a=\frac{1}{2}, e=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}, c=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}, f=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}, d=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\},$$

$$\{a=\frac{1}{2}, b=\frac{-1}{2}, c=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}, e=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}, f=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}, d=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\},$$

$$\{c=\frac{1}{2}, a=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}, b=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}, e=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}, f=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}, d=\frac{1}{2}\},$$

$$\{c=\frac{1}{2}, d=\frac{-1}{2}, e=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}, b=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}, a=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}, f=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\},$$

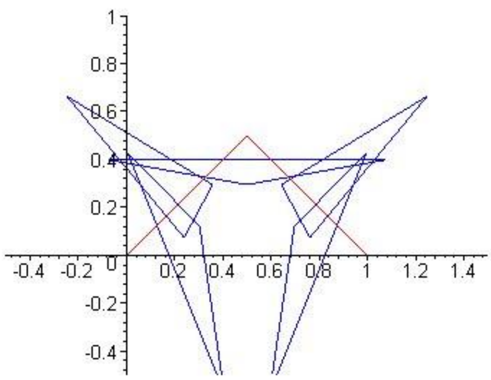
$$\{e=\frac{1}{2}, f=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}, a=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}, b=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}, d=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\},$$

$$\{e=\frac{1}{2}, f=\frac{-1}{2}, c=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}, a=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3}, b=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}, d=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\},$$

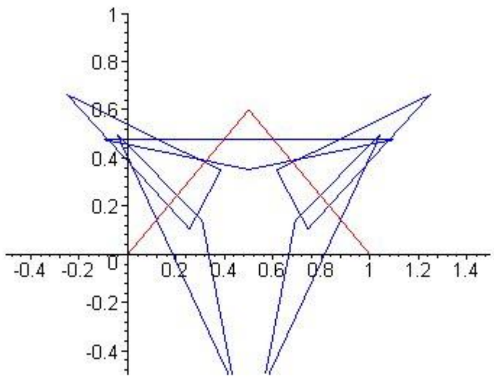
$$\{e=\frac{1}{4}, d=0, c=\frac{1}{2}, a=\frac{3}{4}, b=\frac{1}{4}\sqrt{3}, f=\frac{1}{4}\sqrt{3}\}$$

<u>Un vistazo gráfico a las soluciones generadas para triángulos isósceles.</u>

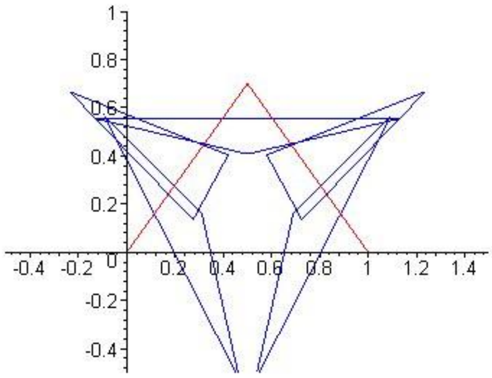
Se resuelve el sistema para distintos valores de *n*, en un triángulo inicial (0,0), (1,0), (0.5,*n*), dibujándose con Maple el conjunto de soluciones obtenidas



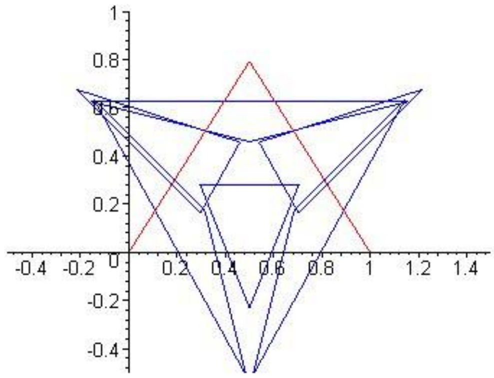
n=0.5



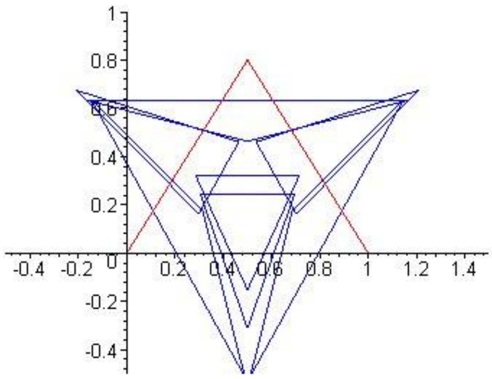
n=0.6



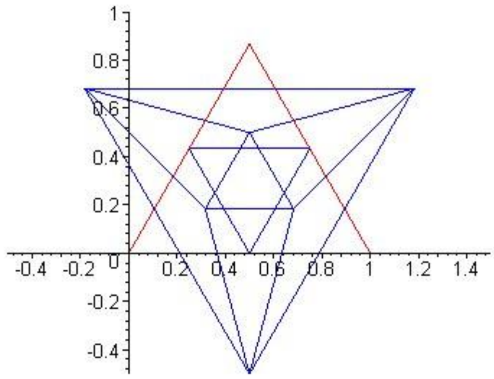
n=0.7



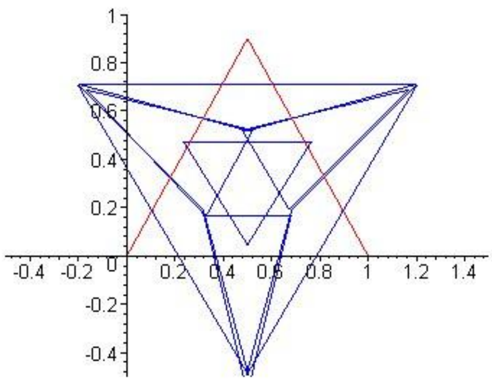
$n=\frac{1}{6}\sqrt{3+8\sqrt{6}} \approx 0.7922527295...$



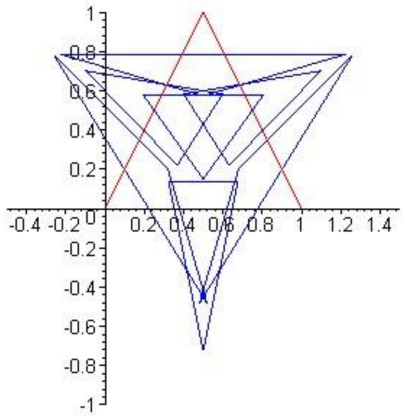
n=0.8



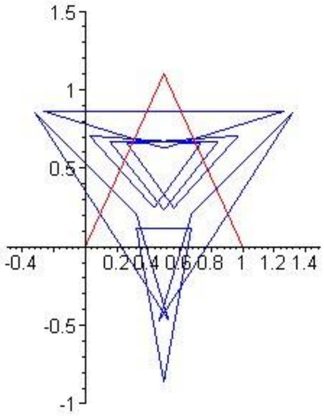
$n=\frac{1}{2}\sqrt{3}$



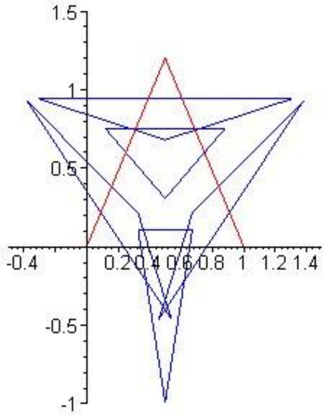
n=0.9



n=1



n=1.1



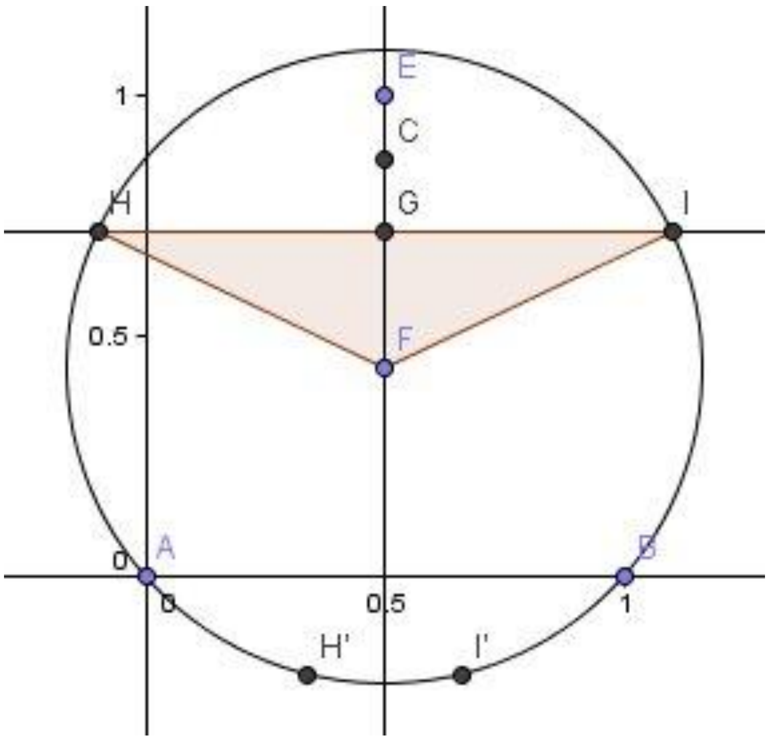
n=1.2

El paso a 6 soluciones se produce en $\frac{1}{6}\sqrt{3+8\sqrt{6}} \approx 0.792252729...$

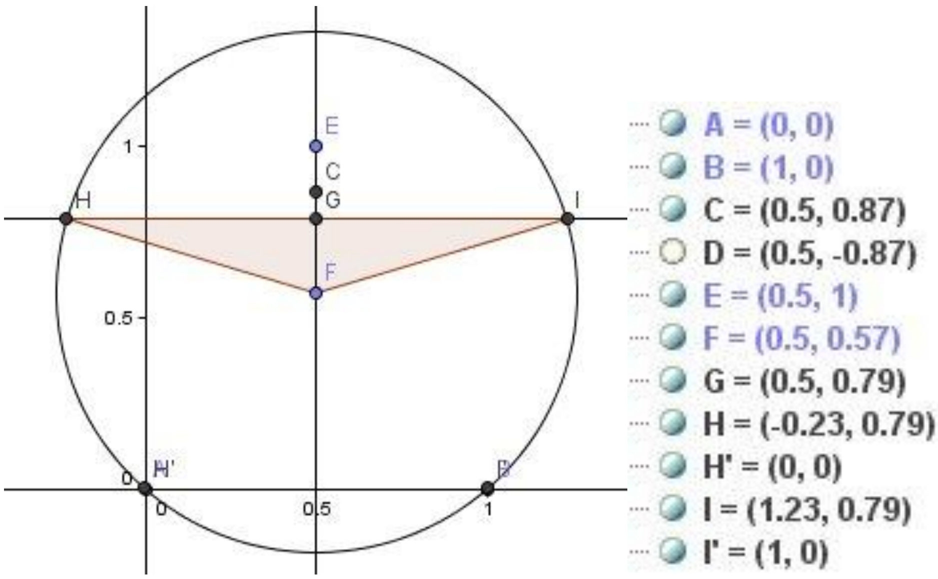
El paso de 7 a 5 se produce en $\frac{1}{14}\sqrt{91+112\sqrt{2}} \approx 1.128010527...$

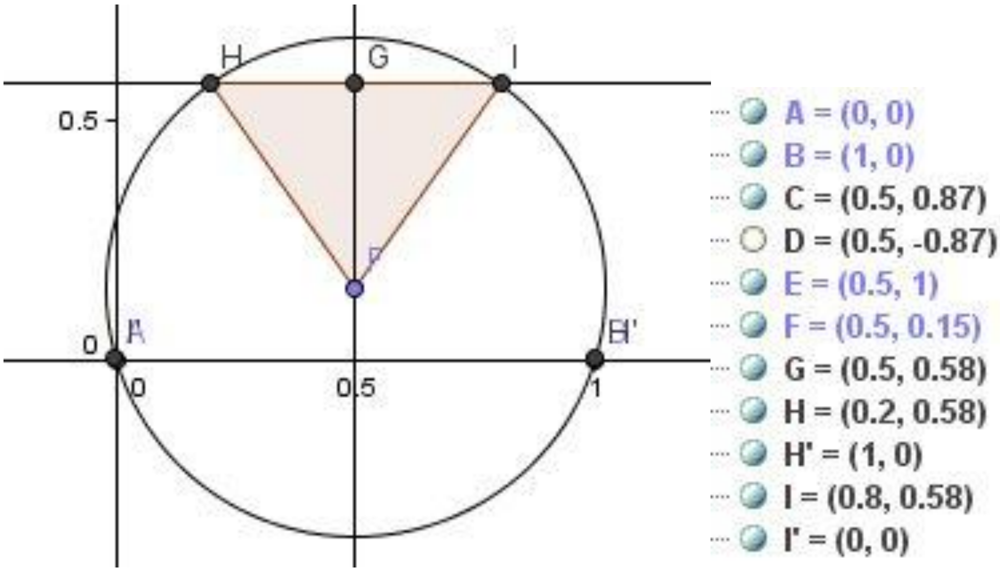
<u>Obtención de soluciones (parciales) para el triángulo isósceles con Geogebra.</u>

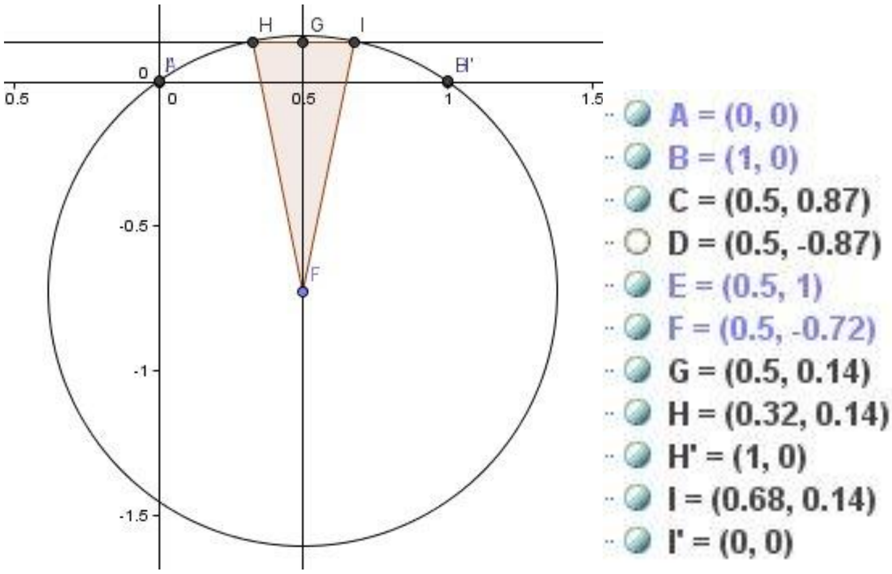
Experimentando, se observa que la siguiente construcción genera algunas soluciones. Para un triángulo inicial A(0,0), B(1,0) y E(0.5,*n*), se construye la perpendicular a AB por E, creando un punto F sobre dicha perpendicular. Se construye G como punto medio de F y E, y la perpendicular a FE por G. A continuación, se construye una circunferencia de centro F y radio FA, y se obtienen los puntos de corte H e I de dicha circunferencia con la perpendicular antes descrita. Se forma el triangulo HIF y se generan los simétricos de H e I (H' e I') respecto a FI y FH respectivamente.



Desplazando F y en función del valor de *n* se llegan a obtener hasta tres soluciones.




H
G
I
0.5
0
0
0.5
1
A = (0, 0)
B = (1, 0)
C = (0.5, 0.87)
D = (0.5, -0.87)
E = (0.5, 1)
F = (0.5, 0.15)
G = (0.5, 0.58)
H = (0.2, 0.58)
H' = (1, 0)
I = (0.8, 0.58)
I' = (0, 0)


H
G
I
0
0.5
0
0.5
1
1.5
-0.5
F
-1
-1.5
A = (0, 0)
B = (1, 0)
C = (0.5, 0.87)
D = (0.5, -0.87)
E = (0.5, 1)
F = (0.5, -0.72)
G = (0.5, 0.14)
H = (0.32, 0.14)
H' = (1, 0)
I = (0.68, 0.14)
I' = (0, 0)

Descripción analítica de las soluciones halladas.

Resolviendo analíticamente con Derive la construcción antes planteada, se obtiene:

Los triángulos formados por los puntos c, d y e, siendo

#25: $c := \left[\dfrac{\sqrt{-a^2 + 2\cdot a\cdot b + 3\cdot b^2 + 1} + 1}{2}, \dfrac{a + b}{2}\right]$

#26: $d := \left[\dfrac{1 - \sqrt{-a^2 + 2\cdot a\cdot b + 3\cdot b^2 + 1}}{2}, \dfrac{a + b}{2}\right]$

#27: $e := \left[\dfrac{1}{2}, b\right]$

teniendo b como valor

#28:

$$b = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12\cdot a^2 - 5}\cdot \mathrm{COS}\left(\dfrac{\mathrm{ASIN}\left(\dfrac{6\cdot\sqrt{3}\cdot a\cdot(4\cdot a^2 - 3)}{(12\cdot a^2 - 5)^{3/2}}\right)}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)}{6} \vee b = - \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12\cdot a^2 - 5}\cdot \mathrm{SIN}\left(\dfrac{\mathrm{ASIN}\left(\dfrac{6\cdot\sqrt{3}\cdot a\cdot(4\cdot a^2 - 3)}{(12\cdot a^2 - 5)^{3/2}}\right)}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)}{6} \vee b = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{12\cdot a^2 - 5}\cdot \mathrm{SIN}\left(\dfrac{\mathrm{ASIN}\left(\dfrac{6\cdot\sqrt{3}\cdot a\cdot(4\cdot a^2 - 3)}{(12\cdot a^2 - 5)^{3/2}}\right)}{3}\right)}{6}$$

Son soluciones al problema 558 para triángulos isósceles genéricos de tipo (0,0) (1,0) y (1/2,a).

El hecho de trabajar con Derive surge de que Maple da un formato mucho menos representable de las tres soluciones posibles.

Resultados obtenidos trabajando con bases de Groebner.

Maple 13 permite resolver el sistema a estudio por el método de bases de Groebner. Así para el caso genérico tipo isósceles, se obtiene unas listas de polinomios de cuya anulación resultan las soluciones del sistema, que omitimos por su extensión.

```
> with(Groebner) :
> G := [Collinear(a, b, c, d, (e + 1)*(1/2), (1/2)*f), Collinear(a, b, e, f, (1/2 + c)*(1/2), (n + d)*(1/2)), Collinear(c, d, e, f, (1/2)*a, (1/2)*b), Perpendicular(a, b, c, d, 1, 0, e, f), Perpendicular(a, b, e, f, 1/2, n, c, d), Perpendicular(c, d, e, f, 0, 0, a, b)];
```

$$\left[(a-c)\left(d-\frac{1}{2}f\right)-\left(c-\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right)(b-d),\ (a-e)\left(f-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}d\right)-\left(e-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}c\right)(b-f),\ (c-e)\left(f-\frac{1}{2}b\right)-\left(e-\frac{1}{2}a\right)(d-f),\ (a-c)(1-e)-(b-d)f,\ (a-e)\left(\frac{1}{2}-c\right)+(b-f)(n-d),\ -(c-e)a-(d-f)b\right]$$

```
> Solve(G, {a, b, c, d, e, f});
```

$$\{[[-a+e, -b+f, -a+c, -b+d], plex(d,c,f,e,b,a), \{a, -2+3a\}], [[a, e, -b+f, c, -b+d], plex(d,c,f,e,b,a), \{b\}], [[-2+3a, -2+3e, -b+f, -2+3c, -b+d], plex(d,c,f,e,b,a), \{\}], [[a, b, e, f, c, d], plex(d,c,f,e,b,a), \{\}], [[-12an^2+8n^2+25a-80a^2+64a^3, 2bn-8a^2+5a, a-1+e, 2fn-8a^2+5a, -1+2c, n^2+nd-8a^2+5a], plex(d,c,f,e,b,a), \{a, -2+3a, -1+2a, -a+2a^2, 2-9a+8a^2, 8an^2-16n^2-9a+8a^2+48n^4a-32n^4+32a^2n^2\}],$$

$$[[1024n^4a^2-768n^4a+144n^4+296n^2+81-2560an^2-720a+7936a^2n^2+2176a^2-10240a^3n^2-2560a^3+4096a^4n^2+1024a^4,$$
$$128n^4a-48n^4+32n^3b+464an^2+512a^3n^2-56n^2-1024a^2n^2-24bn-27+156a+128a^3-256a^2,$$
$$-64n^6-112n^4+788n^2+267-256n^6a+832n^4a-4656an^2-1476a+256n^6e-64n^4e-80n^2e-12e-1024n^4a^2+8704a^2n^2+2240a^2-4096a^3n^2-1024a^3,$$
$$384n^8+864n^6-232n^4-734n^2-189-1024n^8a-4992n^6a+992n^4a+4184an^2+1038a+256n^7f-64n^5f-80n^3f-12fn+9216n^6a^2-1792n^4a^2-7232a^2n^2-1552a^2-4096a^3n^6+1024n^4a^3+3328a^3n^2+704a^3,$$
$$-256n^6a+96n^6+2176n^4a^2-1120n^4a-1024n^4a^3+32cn^4+160n^4-64a^2n^2+64an^2-18n^2-16cn^2-21+64a^3-152a^2-6c+114a,$$
$$-192n^6+16n^4+428n^2+135+384n^4a-2368an^2-744a+256n^5d-128n^3d-48nd-512n^4a^2+4352a^2n^2+1120a^2-512a^3-2048a^3n^2],$$
$$plex(d,c,f,e,b,a), \{a, -2+3a, 4a-1, 2-9a+8a^2, -12an^2+8n^2+25a-80a^2+64a^3, 2a-9a^2+8a^3-n^2+12an^2-36a^2n^2+32a^3n^2,$$
$$-1280n^8+4096n^8a-30720n^6a^2+16384a^3n^6+15360n^6a-2560n^6-3616n^4+23296n^4a-43520n^4a^2+20480n^4a^3+2432a^2n^2-1024a^3n^2-704an^2+128n^2+351-1920a+2848a^2-1280a^3\}]\}$$

Se ha obtenido también la solución del caso genérico (0,0), (1,0), (m,n), del que mostramos solamente la entrada por extensión de la salida.

```
> G := [Collinear(a, b, c, d, (e + 1)*(1/2), (1/2)*f), Collinear(a, b, e, f, (m + c)*(1/2), (n + d)*(1/2)), Collinear(c, d, e, f, (1/2)*a, (1/2)*b), Perpendicular(a, b, c, d, 1, 0, e, f), Perpendicular(a, b, e, f, m, n, c, d), Perpendicular(c, d, e, f, 0, 0, a, b)];
```

$$\left[(a-c)\left(d-\frac{1}{2}f\right)-\left(c-\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right)(b-d),\ (a-e)\left(f-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}d\right)-\left(e-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}c\right)(b-f),\ (c-e)\left(f-\frac{1}{2}b\right)-\left(e-\frac{1}{2}a\right)(d-f),\ (a-c)(1-e)-(b-d)f,\ (a-e)(m-c)+(b-f)(n-d),\ -(c-e)a-(d-f)b\right]$$

```
> Solve(G, {a, b, c, d, e, f});
```

Un apunte experimental.

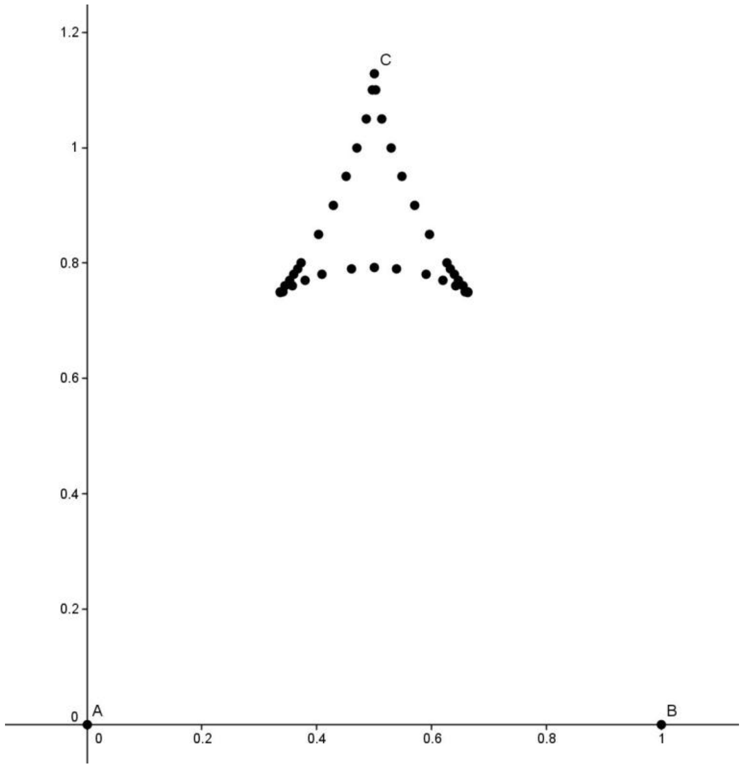
Se decide realizar otro experimento. En el intervalo en que los triángulos isósceles tienen siete soluciones, ¿qué ocurre si desplazamos horizontalmente el vértice (0.5,*n*)? Para *n*=1, el vértice puede desplazarse hasta (0.529487, 1) generando siete soluciones para un triangulo escaleno…

```
> solve({Collinear(a,b,c,d,(e+1)*(1/2),(1/2)*f)=0,Collinear(a,b,e,f,(0.52948
  7+c)*(1/2),(1.0+d)*(1/2))=0,Collinear(c,d,
  e,f,(1/2)*a,(1/2)*b)=0,Perpendicular(a,b,c,d,1,0,e,f)=0,Perpendicular(a,b,
  e,f,0.529487,1.0,c,d)=0,Perpendicular(c,d, e,f,0,0,a,b)=0},{a,b,c,d,e,f});
{a = e, f = f, e = e, d = f, b = f, c = e},
  {a = .4739892012, b = -.4828038849, f = .1990874448, d = .7707465026, e = .6856756821, c = 1.267965771},
  {e = .3224679877, b = .1344857337, c = .4951373969, f = .1414983419, d = -.7245658841, a = .6745449781},
  {a = .3281060356, c = -.2508647338, d = .7886304109, b = .1973065674, f = -.4786025749, e = .5111858334},
  {e = .06007702368, d = .1758239568, a = .6956699835, b = .5629062098, c = .4333055522, f = .6370799881},
  {c = .4326832448, b = .5630051244, d = .1762210407, f = .6377503729, a = .6947265964, e = .05866074375},
  {a = 1.175396037, e = .4445597567, b = .7207439588, c = .6614869742, f = .5938032054, d = .2400362555},
  {a = -.2187153321, e = 1.241090473, c = .5192597950, b = .8043562908, f = .7693832217, d = .5731077176}
```

Y pasando a (0.529488, 1) se generan cinco soluciones para un triangulo escaleno…

```
> solve({Collinear(a,b,c,d,(e+1)*(1/2),(1/2)*f)=0,Collinear(a,b,e,f,(0.52948
  8+c)*(1/2),(1.0+d)*(1/2))=0,Collinear(c,d,
  e,f,(1/2)*a,(1/2)*b)=0,Perpendicular(a,b,c,d,1,0,e,f)=0,Perpendicular(a,b,
  e,f,0.529488,1.0,c,d)=0,Perpendicular(c,d, e,f,0,0,a,b)=0},{a,b,c,d,e,f});
{a = e, f = f, e = e, d = f, b = f, c = e},
  {e = .6856759175, b = -.4828039469, c = 1.267966075, a = .4739889402, d = .7707462115, f = .1990874739},
  {c = .4951372320, a = .6745449254, d = -.7245659376, b = .1344856068, e = .3224679394, f = .1414984525},
  {d = .7886307264, b = .1973065362, a = .3281062673, c = -.2508644584, f = -.4786024948, e = .5111855918}, {
  a = .6951982147 + .0002773849399 I, e = .05936932256 + .0004164304945 I,
  b = .5629552109 - .00002908451395 I, d = .1760222308 - .0001167555605 I,
  f = .6374151832 - .0001971146958 I, c = .4329944186 + .0001829777107 I}, {
  c = .4329944186 - .0001829777107 I, b = .5629552109 + .00002908451395 I,
  f = .6374151832 + .0001971146958 I, a = .6951982147 - .0002773849399 I,
  e = .05936932256 - .0004164304945 I, d = .1760222308 + .0001167555605 I},
  {a = 1.175398384, e = .4445610594, b = .7207444765, d = .2400368200, f = .5938035517, c = .6614878660},
  {b = .8043569056, f = .7693826502, a = -.2187149464, c = .5192604480, e = 1.241090847, d = .5731077181}
```

Para *n*=1.1 el desplazamiento es hasta 0.5030005…
Para *n*=0.9 el desplazamiento es hasta 0.570977…
Para *n*=0.8 el desplazamiento es hasta 0.626497…
Para *n*=0.79225 el desplazamiento es hasta 0.631583…
Y a continuación aparecen intervalos no centrados en 0.5 en que vuelven a existir siete soluciones:
Para n=0.79 entre 0.539223… y 0.633092…
Para n=0.78 entre 0.590206… y 0.639969…
Para n=0.77 entre 0.619736… y 0.647185…
Para n=0.76 entre 0.641753… y 0.654833…
Para n=0.75 entre 0.659156… y 0.663088…
Cuya representación muestra la región que aparece a continuación



Como se observa, el número de soluciones al problema varía entre 5 y 7. La región que permite siete soluciones para un triángulo de base unidad es la anteriormente esbozada. Existe además la peculiaridad de que el autor no ha sido capaz de obtener soluciones mas que con el sistema de cómputo algebraico Maple.