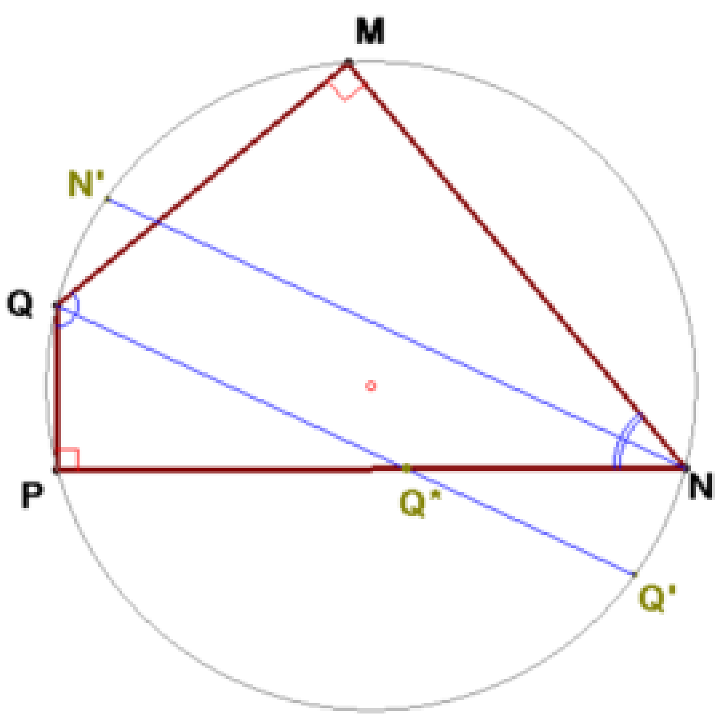
In memoriam, al profesor Gennaro Rispoli.

***Problema* 559.-** *Sea P un punto del interior del triángulo ABC. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB, respectivamente.*

Si los tres cuadriláteros AEPF, BFPD y CDPE tienen incírculos tangentes a los cuatro lados, demostrar que P es el incentro de ABC.

Rabinowitz, S. (2004): Crux Mathematicorum, Problem 2902. 30.1, (p.38)

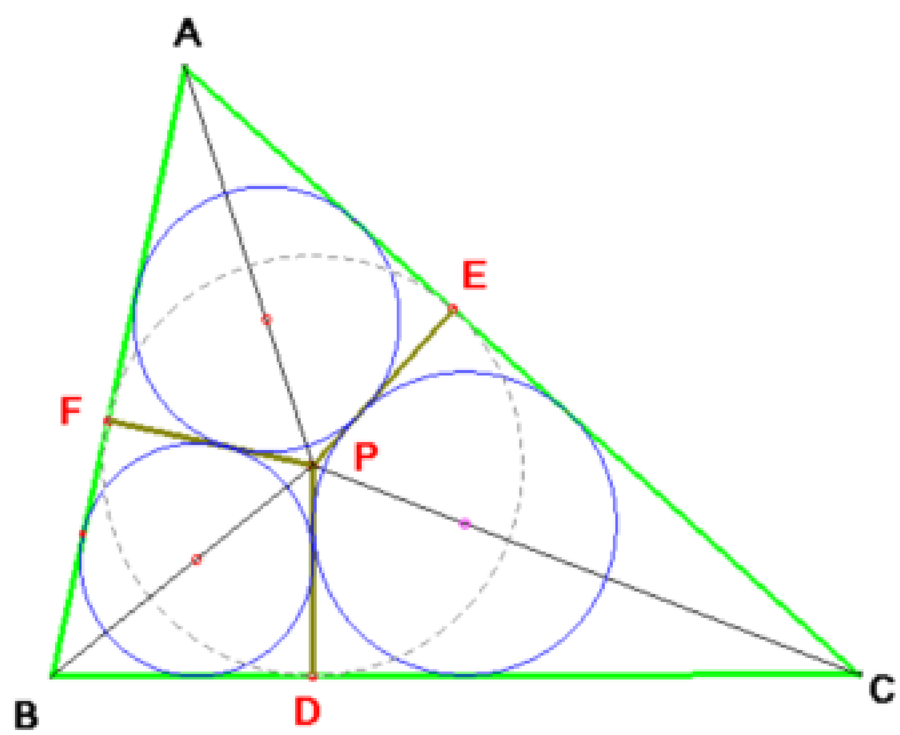
Solución de Saturnino Campo Ruiz profesor del I.E.S. *Fray Luis de León* de Salamanca.



Si un cuadrilátero es circunscriptible la suma de los lados opuestos es constante y el centro del círculo inscrito está en la intersección de las bisectrices de sus cuatro ángulos.

Los cuadriláteros que tenemos tienen dos ángulos opuestos rectos, por tanto son también inscriptibles. En un cuadrilátero de este tipo *MNPQ*, las bisectrices *NN'* y *QQ'* de *N* y *Q* respectiva-mente son paralelas, pues al ser suple-mentarios estos ángulos, los resultantes de la bisección, $\measuredangle N'NP$ y $\measuredangle Q^*QP$ son complemen-tarios, con lo cual $\measuredangle QQ^*P = \measuredangle N'NP$ que implica el paralelismo de las bisectrices.

La única



posibilidad de intersección de estas bisectrices es que sean la misma recta, esto es, que la diagonal *QN* sea también la bisectriz de los ángulos opuestos *Q* y *N*. Cuando es así se tienen triángulos rectángulos congruentes *NMQ* y *NPQ* y se cumple la condición de circunscriptible para el cuadrilátero *MNPQ*.

Resumiendo: los cuadriláteros como los del problema han de tener dos vértices opuestos sobre la bisectriz y los otros dos sobre los lados. Esta condición, para cada uno de los vértices del triángulo, nos lleva a que el punto *P*, que sirve para definirlos, sea necesariamente el incentro. ■