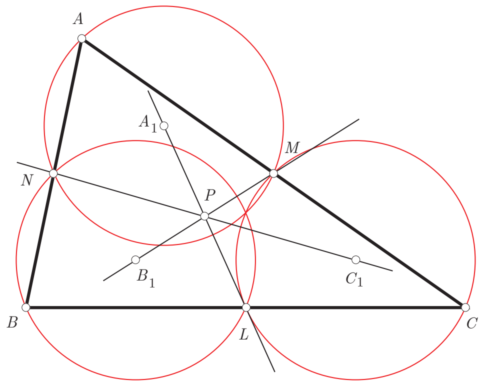
Problema 560.

Trazar tres circunferencias que pasen por los vértices de un triángulo y los puntos medios de los lados concurrentes. Unamos el centro de cada circunferencia con el punto de corte de las otras dos circunferencias (el punto medio del lado, pues en el punto de Miquel se cortan las tres) con un segmento. Demostrar que los tres segmentos así obtenidos se intersecan en un único punto que pertenece a la recta de Euler.

González Calvet, R., Treatise of plane geometry through geeometric algebra (ed. electrónica, 2000-2001, ed. impresa, 2007), problema 9.5.

Soluzione di Ercole Suppa.

Utilizziamo coordinate baricentriche omogenee rispetto al triangolo $\triangle ABC$. I calcoli sono svolti con il programma Mathematica mediante le routines contenute nel pacchetto `baricentricas.nb`, prelevabile dal sito di Francisco Javier García Capitán [1].



Indichiamo con L, M, N i punti medi di BC, CA, AB e con A_1, B_1, C_1 i centri delle circonferenze circonscritte ai triangoli $\triangle ANM$, $\triangle BLN$, $\triangle CML$.

Troviamo le cordinate baricentriche dei punti L, M, N:

```
<< Baricentricas`;
ptL = Medio[ptB, ptC];
ptM = Medio[ptA, ptC];
ptN = Medio[ptB, ptA];
{0, 1, 1}
{1, 0, 1}
{1, 1, 0}
```

[1] http://garciacapitan.auna.com/baricentricas/

Troviamo le cordinate baricentriche dei punti A_1, B_1, C_1:

```
ptA1 = Circuncentro[{ptA, ptM, ptN}]
ptB1 = Circuncentro[{ptB, ptL, ptN}]
ptC1 = Circuncentro[{ptC, ptM, ptL}]
```

$$\left\{-2\,a^4 - \left(b^2 - c^2\right)^2 + 3\,a^2\,\left(b^2 + c^2\right),\ b^2\,\left(a^2 - b^2 + c^2\right),\ c^2\,\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\right\}$$

$$\left\{a^2\,\left(a^2 - b^2 - c^2\right),\ a^4 + 2\,b^4 - 3\,b^2\,c^2 + c^4 - a^2\,\left(3\,b^2 + 2\,c^2\right),\ c^2\,\left(-a^2 - b^2 + c^2\right)\right\}$$

$$\left\{a^2\,\left(a^2 - b^2 - c^2\right),\ b^2\,\left(-a^2 + b^2 - c^2\right),\ a^4 + b^4 - 3\,b^2\,c^2 + 2\,c^4 - a^2\,\left(2\,b^2 + 3\,c^2\right)\right\}$$

Verifichiamo che le rette A_1L, B_1M, C_1N sono concorrenti

```
SonPerspectivos[{ptA1, ptB1, ptC1}, {ptL, ptM, ptN}]
True
```

Determiniamo il punto $P = A_1L \cap B_1M \cap C_1N$ (P=centro di prospettività dei triangoli $\triangle A_1B_1C_1$ ed $\triangle LMN$)

```
ptP = Perspector[{ptA1, ptB1, ptC1}, {ptL, ptM, ptN}]
```

$$\left\{2\,a^4 + \left(b^2 - c^2\right)^2 - 3\,a^2\,\left(b^2 + c^2\right),\right.$$
$$\left. a^4 + 2\,b^4 - 3\,b^2\,c^2 + c^4 - a^2\,\left(3\,b^2 + 2\,c^2\right),\ a^4 + b^4 - 3\,b^2\,c^2 + 2\,c^4 - a^2\,\left(2\,b^2 + 3\,c^2\right)\right\}$$

Cerchiamo il punto P nell'enciclopedia di Kimberling [2], per vedere se si tratta di un punto conosciuto.

```
Kimberling[ptP]
3.6676173179
```

In effetti, mediante una semplice ricerca, possiamo constatare $P = X(140)$.

Index	Coordinate
138	3.323272182948
139	-2.96603481128
140	3.667617317915
141	3.447598941200
142	2.158066839118
143	-.095497496756

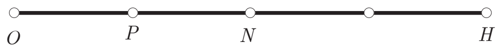
Verifichiamo che il punto P giace sulla retta di Eulero e determiniamo il rapporto PO/PH

```
EstanAlineados[{ptP, ptO, ptH}]
True
RazonSimple[ptO, ptP, ptH]
```

$$\frac{1}{3}$$

[2] http:http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

Pertanto $PO/PH = 1/3$ e questo implica che P è il punto medio di ON, essendo N il centro del cerchio dei nove punti



ptN = Medio[ptO, ptH]

$$\left\{\left(b^2-c^2\right)^2-a^2\left(b^2+c^2\right),\ a^4-b^2c^2+c^4-a^2\left(b^2+2c^2\right),\ a^4+b^4-b^2c^2-a^2\left(2b^2+c^2\right)\right\}$$

Medio[ptO, ptN]

$$\left\{-2a^4-\left(b^2-c^2\right)^2+3a^2\left(b^2+c^2\right),\right.$$
$$\left.-a^4-2b^4+3b^2c^2-c^4+a^2\left(3b^2+2c^2\right),\ -a^4-b^4+3b^2c^2-2c^4+a^2\left(2b^2+3c^2\right)\right\}$$

$\square$