Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico "A. Einstein" Teramo, Italia.

Problema 561.- *Los semiejes α y β de la elipse de Steiner del triángulo ABC (elipse circunscrita al triángulo y que tiene por centro al baricentro del mismo), verifican las identidades:*

a) $\alpha\beta = \frac{4\Delta}{3\sqrt{3}}$

b) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2)$

siendo a, b y c los lados y Δ el área del triángulo

Barisien E.N., (1911) Il Periodico di Matematica, pag. 40, problema 782.

Solución de Saturnino Campo Ruiz profesor del I.E.S. *Fray Luis de León* de Salamanca.

En el enlace http://www.edu-xusta.es/math/Las%20elipses%20de%20Steiner%20.html se deja prácticamente resuelto el problema.

Se comienza probando que el triángulo de mayor área inscrito en un círculo es el equilátero. El baricentro del mismo es naturalmente, el centro del círculo. A partir de aquí se trata de encontrar una transformación afín (que conserva el paralelismo) que transforme el triángulo equilátero en un triángulo cualquiera dado. Una transformación así hará de la circunferencia circunscrita una elipse -cónica del mismo tipo al ser una afinidad- también circunscrita al triángulo transformado. Esta es la elipse de Steiner para este triángulo. (En el enlace se habla de la ex-elipse de Steiner, pues hay otra inscrita). Además, toda transformación afín deja invariantes las razones entre longitudes y áreas. Es decir si *AB* y *CD* son dos segmentos que se transforman en *A'B'* y *C'D'*, si $\frac{AB}{CD} = \alpha$, resulta que se verifica $\frac{A'B'}{C'D'} = \alpha$. Y lo mismo sucede para razones entre áreas.

Para simplificar la situación se toma un triángulo equilátero de lado 1, con centro en el origen y un lado apoyado en el eje de abscisas. El triángulo genérico se tomará también con un vértice en el origen, la base de longitud 1, apoyada en el eje de abscisas y el tercer vértice un punto *C*(*a*,*b*). Un triángulo como este último será denotado por *T*(*a*,*b*).

Siguiendo esta línea de trabajo, encontramos que la afinidad que pasa de un triángulo *T*(*a*,*b*) a otro *T*(*c*,*d*) viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-a+c}{b} & \frac{d}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

En particular si queremos que transforme el triángulo equilátero $T_E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, en el triángulo *T*(*a*,*b*) deberemos poner

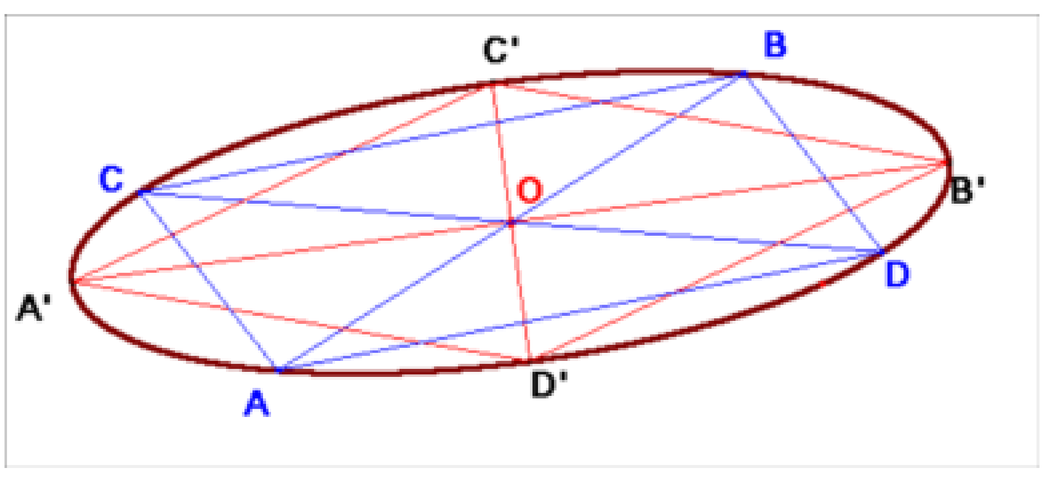
$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2a-1}{\sqrt{3}} & \frac{2b}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \quad (**)$$

Aplicada a la elipse de Steiner del triángulo equilátero (circunferencia circunscrita de ecuación $x^2 + y^2 - x - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$) se obtiene la elipse de Steiner del triángulo *T*(*a*,*b*).

Siguiendo el documento citado, es constante la razón entre el área de la *elipse circunscrita* $\frac{\pi}{3}$, y la del triángulo $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Se tiene pues $\frac{\text{Área elipse}}{\text{Área triángulo}} = \frac{\pi\alpha\beta}{\Delta} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. De donde se deduce que $\alpha\beta = \frac{4\Delta}{3\sqrt{3}}$ como se pretendía probar.

Para la segunda cuestión (y también para la primera) nos vamos a apoyar en el teorema de Apolonio para elipse, según el cual ***en una elipse cualquiera es constante la suma de los cuadrados de las longitudes de dos diámetros conjugados y el área del paralelogramo definido con ellos.***

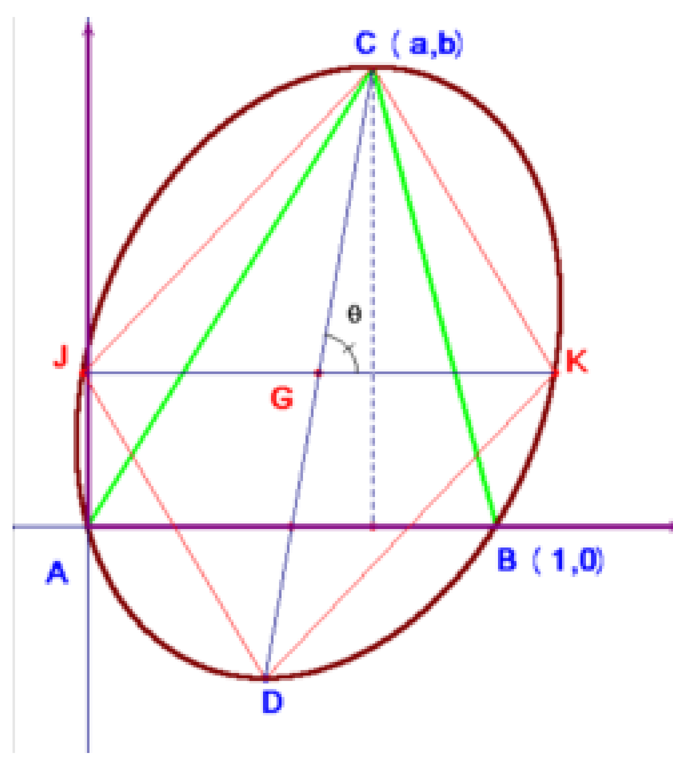


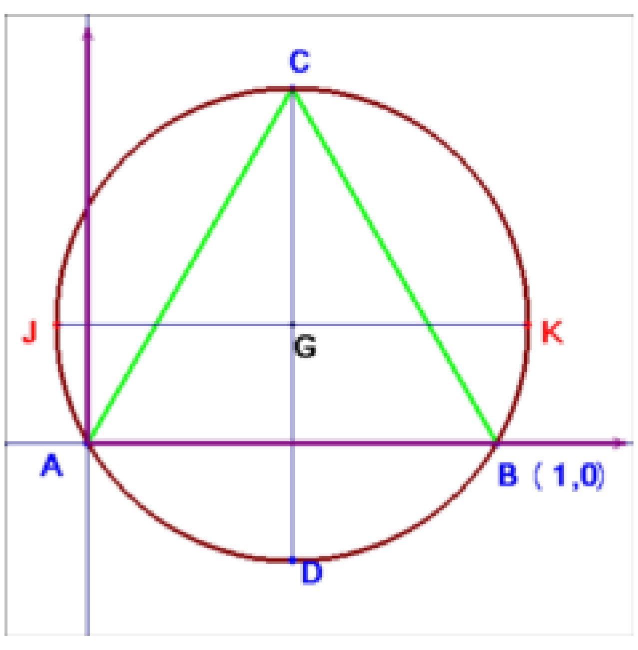
El área del paralelogramo *A'C'B'D'* es igual al semiproducto de los ejes. El área del paralelogramo definido por dos diámetro conjugados *ACBD* es 2*OB*·*OD*·*sen*(*OB*,*OD*) y son iguales.

No necesitamos calcular los ejes, nos bastará con un par de diámetros conjugados.

Un diámetro *JK*, paralelo al eje de abscisas, se obtiene transformando según (**) el diámetro de la circunscrita definido por los puntos $\left(\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \right)$. Se obtienen los puntos $\left(\frac{a+1\mp\sqrt{3}}{3}, \frac{b}{3}\right)$.

Es bastante sencillo ver que el diámetro conjugado con esa dirección es la mediana desde el vértice *C*(*a*,*b*). Son semidiámetros conjugados los segmentos *CG*=$\left(a - \frac{a+1}{3}, b - \frac{b}{3}\right)$ y *JG*, siendo *J*=$\left(\frac{a+1-\sqrt{3}}{3}, \frac{b}{3}\right)$. Los cuadrados de las longitudes de estos segmentos son $GC^2 = \frac{1}{9}((2a-1)^2 + 4b^2)$ y $JG^2 = \frac{3}{9}$.





Los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo *T*(*a*,*b*) son: 1, $(a-1)^2 + b^2$ y $a^2 + b^2$. Es un sencillo cálculo comprobar que se verifica la segunda relación del enunciado.

También se puede probar usando este teorema la primera parte. El área del paralelogramo *CJDK* definido con dos diámetros conjugados es igual al doble del producto de los semidiámetros por el seno del ángulo que forman y, por el teorema de Apolonio, es igual al doble producto de los semiejes.

$\alpha\beta = \frac{1}{2}[CJDK] = |GC||GJ|.\text{sen } \theta = |GC|.\frac{\sqrt{3}}{3}\text{sen } \theta.$

El seno del ángulo y el área del triángulo se calculan fácilmente: $\text{sen}\theta = \frac{2/_3 b}{|CG|}$, de donde $|GC|\text{sen } \theta = \frac{2}{3}b$; $\Delta = [ABC] = \frac{b}{2}$ y por tanto, sustituyendo se tiene

$\frac{1}{2}[CJDK] = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{3}b = \frac{4\Delta\sqrt{3}}{9} = \frac{4\Delta}{3\sqrt{3}}$. ■

Si deseamos calcular la ecuación de la elipse de Steiner (circunscrita) de *T*(*a*,*b*), tomamos un punto genérico (*x*,*y*) de la misma y la transformación inversa nos dará el punto genérico de la circunscrita al triángulo equilátero.

La afinidad que pasa de un triángulo *T*(*a*,*b*) al triángulo $T_E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ tiene por matriz, la inversa de la anterior. Se expresa así:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2a-1}{-2b} & \frac{\sqrt{3}}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \quad (***)$$

Operando se obtienen: $x' = x - \frac{2a-1}{2b}y$ e $y' = \frac{\sqrt{3}}{2b}y$. El punto (x',y') verifica la ecuación $x'^2 + y'^2 - x' - \frac{y'}{\sqrt{3}} = 0$, esto es,

$$\left(x - \frac{2a-1}{2b}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2b}y\right)^2 - x + \frac{2a-1}{2b}y - \frac{y}{2b} = 0$$

Simplificando resulta la ecuación de la elipse de Steiner que estamos buscando:

$$\boxed{b^2x^2 - (2a-1)bxy - b^2x + (a^2 - a + 1)y^2 + (a-1)by = 0}$$

Por último, observemos que las tangentes a la elipse de Steiner en los vértices del triángulo son paralelas al lado opuesto, tal como sucede con el triángulo equilátero y la circunscrita.