Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P, sean X, Y, Z los simétricos de los puntos P respecto a los lados del triángulo dado. Entonces las circunferencias circunscritas a $\widehat{XYC}$, $\widehat{YZA}$, $\widehat{ZXB}$ y $\widehat{ABC}$, se cortan en un punto común.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **562**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

Reflexiones en el triángulo

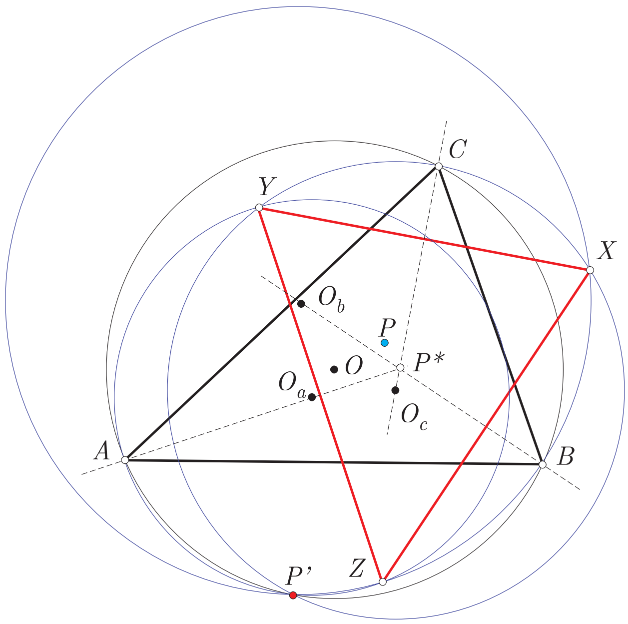
Dibujar un triángulo ABC y marcar un punto P. Marcar las reflexiones X, Y, Z del punto P respecto a los lados del triángulo. Entonces las circunferencias XYC, YZA, ZXB y la ABC misma, todas se cortan en un punto común.

Pag 258

Wells, D. (1991) THE PENGUIN DICTIONARY OF CURIOUS AND INTERESTING GEOMETRY. the Penguin Group

—— - ——

Hagamos una demostración analítica usando coordenadas homogéneas relativas a $\widehat{ABC}$. Para determinar el punto simétrico de uno dado respecto a una recta, vamos a hacer uso del producto escalar de vectores dados por sus componentes respecto al triángulo $\widehat{ABC}$. Así, para hallar el simétrico de $P(u:v:w)$ respecto al lado BC, determinamos la perpendicular a este lado por P, la cual corta a BC en X_1, y luego determinar el punto X que divide al segmento PX_1 en la razón $PX : XX_1 = 2 : -1$.



Usando la notación de Conway, $2S_A = b^2 + c^2 - a^2, 2S_B = c^2 + a^2 - b^2, 2S_C = a^2 + b^2 - c^2$, la perpendicular por $P(u:v:w)$ a BC es:

$$(S_Bv - S_Cw)x - (S_Bu + a^2w)y + (S_Cu + a^2v)z = 0,$$

que corta a dicho lado en $\left(0 : S_Cu + a^2v : S_Bu + a^2w\right)$. Siendo, entonces, el simétrico de P, respecto a BC, el punto:

$$X\left(-a^2u : a^2v + 2S_Cu : a^2w + 2S_Bu\right).$$

Similarmente, procediendo cíclicamente, obtenemos los simétricos de P respecto a los otros dos lados de $\widehat{ABC}$, para obtener el triángulo $\widehat{XYZ}$[1],

[1] El triángulo $\widehat{XYZ}$ se conoce en la bibliografía como diversos nombres. Así, se denomina:
"The reflection triangle of P", en Antreas P. Hatzipolakis and Paul Yiu.- Reflections in Triangle Geometry. Forum Geometricorum 9 (200) p.303.
Triángulo simétrico-lateral, en Francisco J. García Capitán.- El triángulo simétrico-lateral.
http://tecfa.unige.ch/problemes/documents/simetricolateral.pdf_2.pdf

$$Y\left(b^2u+2S_Cv : -b^2v : b^2w+2S_Av\right), \qquad Z\left(c^2u+2S_Bw : c^2v+2S_Aw : -c^2w\right).$$

Partiendo de la ecuación de una circunferencia general, $a^2yz+b^2zx+c^2xy-(x+y+z)(px+qy+rz)=0$, se obtienen, sustituyendo las coordenadas de los vértices de $\widehat{XYC}$, los valores de p, q y r, dando la ecuación de la circunferencia circunscrita:

$$\Gamma_a : \; a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{S_A(u+v+w)}(x+y+z)(c^2(S_Au-S_Cw)y+b^2(S_Au-S_Bv)z)=0.$$

Similarmente se obtienen las ecuaciones de las circunferencia circunscritas a los triángulos $\widehat{YZA}$ y $\widehat{ZXB}$:

$$\Gamma_b : \; a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{S_B(u+v+w)}(x+y+z)(a^2(S_Bv-S_Au)z+c^2(S_Bv-S_Cw)x)=0,$$

$$\Gamma_c : \; a^2yz+b^2zx+c^2xy-\frac{1}{S_C(u+v+w)}(x+y+z)(b^2(S_Cw-S_Bv)x+a^2(S_Cw-S_Au)y)=0.$$

Restando la ecuación de la circunferencia Γ_a de la $a^2yz+b^2zx+c^2xy=0$ de la circunferencia Γ, circunscrita a $\widehat{ABC}$, se obtiene el eje radical de ambas, que tiene el punto A, común con ambas:

$$d_a : \; c^2(S_Au-S_Cw)y+b^2(S_Au-S_Bv)z=0.$$

El otro punto de intersección de d_a y Γ es:

$$P'\left(\frac{a^2}{S_Bv-S_Cw} : \frac{b^2}{S_Cw-S_Au} : \frac{c^2}{S_Au-S_Bv}\right). \tag{1}$$

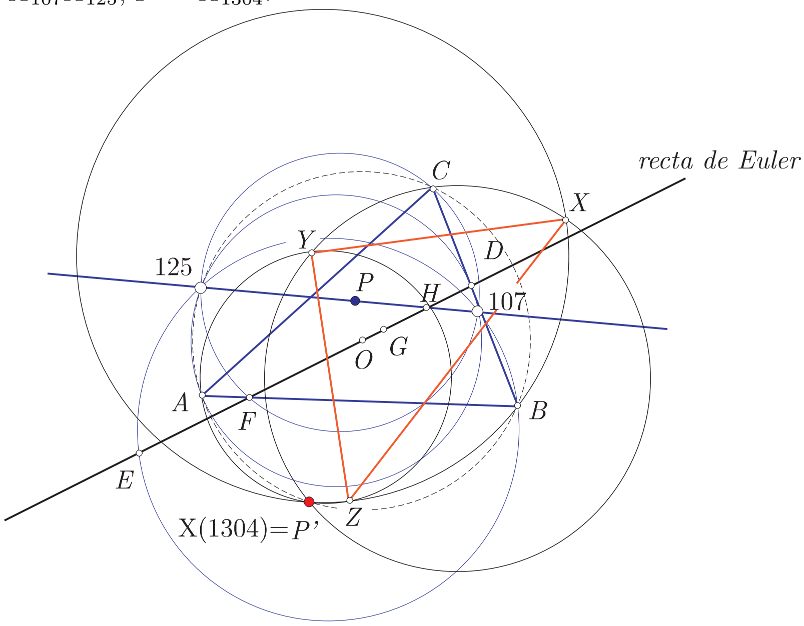
Si intersecamos los otros ejes radicales de Γ y las circunferencias Γ_b y Γ_c con Γ nos da este mismos punto.

NOTAS:

• Si P recorre una recta que contiene al ortocentro, entonces P' es un punto fijo.

• Si P recorre la recta de Euler, entonces P' es el X_{110}, foco de la parábola de Kiepert.

• Si D, E y F son los puntos donde la recta de Euler corta a los lados BC, CA y AB, respectivamente, entonces las circunferencias de diámetros AD, BE y CF se cortan en dos puntos – (uno el centro de la hipérbola de Jerabek, X_{125}, y el otro el simétrico, X_{107}, respecto a la recta de Euler del punto de Miquel, X_{1304}, del cuadrilátero formado por AB, BC, CA y la recta de Euler) – (Ver página 429 en J.R. Musselman.- On the line of images. American Math. Monthly, 45(1938) nº7, 421-430).
Si P recorre la recta $X_{107}X_{125}$, $P'=X_{1304}$.



• Los circuncentros de los triángulos $\widehat{AYZ}, \widehat{BZX}$ y $\widehat{CXY}$ son, respectivamente:

$$O_a\left(2S_A u + (b^2 - a^2)v + (c^2 - a^2)w : b^2 w : c^2 v\right),$$

$$O_b\left(a^2 w : 2S_B v + (c^2 - b^2)w + (a^2 - b^2)u : c^2 u\right),$$

$$O_c\left(a^2 v : b^2 u : 2SCw + (a^2 - c^2)u + (b^2 - c^2)v\right).$$

El triángulo $\widehat{O_a O_b O_c}$ es perspectivo con $\widehat{ABC}$ y el centro de perspectividad coincide con el circuncentro de $\widehat{XYZ}$, que es el conjugado isogonal P^* de P.

• Por la expresión del punto P' en (1), si el punto $P(u : v : w)$ es un "centro del triángulo", en el sentido de la Enciclopedia de Kimberling (ETC), dicho punto P' es también un centro, aunque no tiene por qué estar actualmente en ella.

Algunos puntos P en ETC para los cuales P' también figura en ella, que expresamos como pares (P, P') y excluimos los puntos P que están en la recta de Euler (para los cuales $P' = X_{110}$) son:

$(X_1, X_{109}); (X_6, X_{112}); (X_7, X_{934}); (X_8, X_{100}); (X_9, X_{101}); (X_{10}, X_{101}); (X_{11}, X_{2720}); (X_{19}, X_{101});$
$(X_{32}, X_{2715}); (X_{33}, X_{109}); (X_{34}, X_{109}); (X_{40}, X_{101}); (X_{51}, X_{107}); (X_{52}, X_{925}); (X_{53}, X_{112}); (X_{54}, X_{933});$
$(X_{56}, X_{2720}); (X_{64}, X_{1301}); (X_{65}, X_{108}); (X_{66}, X_{1289}); (X_{67}, X_{935}); (X_{68}, X_{925}); (X_{69}, X_{99}); (X_{70}, X_{1288});$
$(X_{71}, X_{101}); (X_{72}, X_{100}); (X_{73}, X_{109}); (X_{74}, X_{1304}); (X_{75}, X_{1310}); (X_{76}, X_{99}); (X_{80}, X_{2222}); (X_{83}, X_{827});$
$(X_{92}, X_{100}); (X_{93}, X_{930}); (X_{94}, X_{476}); (X_{98}, X_{2715}); (X_{104}, X_{2720}); (X_{107}, X_{1304}); (X_{108}, X_{2720}); (X_{112}, X_{2715});$
$(X_{115}, X_{2715}); (X_{125}, X_{1304}); (X_{132}, X_{2715}); (X_{133}, X_{1304}); (X_{143}, X_{476}); (X_{145}, X_{901}); (X_{184}, X_{933}); (X_{185}, X_{107});$
$(X_{195}, X_{1291}); (X_{235}, X_{110}); (X_{294}, X_{919}); (X_{314}, X_{99}); (X_{329}, X_{100}); (X_{389}, X_{107}); (X_{399}, X_{1291}); (X_{511}, X_{99});$
$(X_{512}, X_{98}); (X_{513}, X_{104}); (X_{514}, X_{103}); (X_{515}, X_{109}); (X_{516}, X_{101}); (X_{517}, X_{100}); (X_{518}, X_{1292}); (X_{519}, X_{1293});$
$(X_{520}, X_{1294}); (X_{521}, X_{1295}); (X_{522}, X_{102}); (X_{523}, X_{74}); (X_{524}, X_{1296}); (X_{525}, X_{1297}); (X_{526}, X_{477});$
$(X_{528}, X_{2742}); (X_{885}, X_{105}); (X_{942}, X_{934}); (X_{1112}, X_{476}); (X_{1154}, X_{930}); (X_{1263}, X_{1291}); (X_{1503}, X_{112});$
$(X_{1510}, X_{1141}); (X_{1699}, X_{109}); (X_{1843}, X_{99}); (X_{1986}, X_{476}); (X_{1990}, X_{112}); (X_{2052}, X_{107}); (X_{3060}, X_{925});$
$(X_{3519}, X_{930}); (X_{3567}, X_{107}); (X_{3574}, X_{933}).$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2426.pdf