

Problema 562 de *triánguloscabri*. triangle reflections Draw a triangle ABC and mark any point P . Mark the reflections X, Y, Z , of the point P in the sides of the triangle. The the circles XYC, YZA, ZXB and ABC itself, all meet in a common point.

Wells, D. *The Penguin Book of Curious and Interesting Geometry*, p. 258.

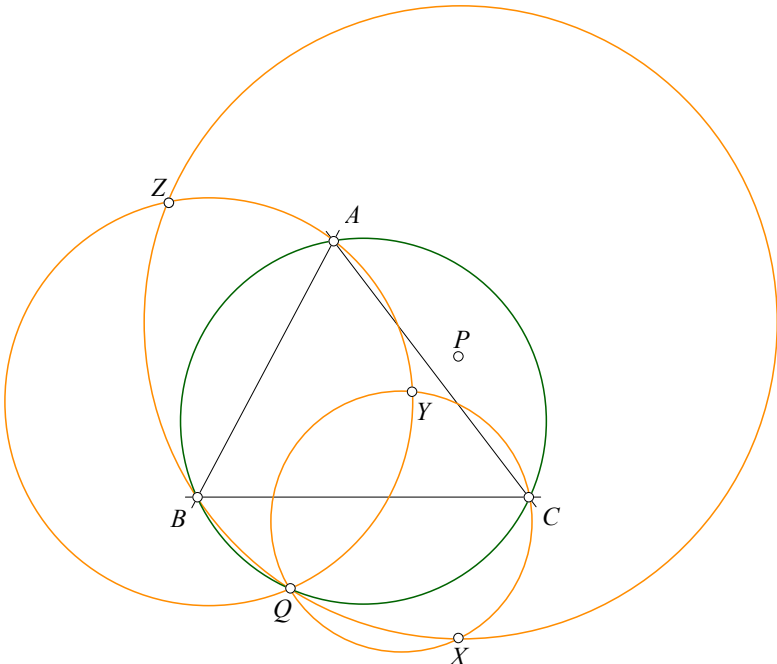


FIGURA 1

Si partimos de $P = (u : v : w)$ podemos calcular el centro radical Q de los círculos XYC, YZA, ZXB y comprobar que dicho punto está en el círculo circunscrito a ABC :

```
<< Baricentricas` ;
ptP = {u, v, w};
{ptX, ptY, ptZ} = Map[SimetriaAxial[ptP, #] &, {rtBC, rtCA, rtAB}];
ptQ = Factor[Simplificar[
  CentroRadicalTresTriangulos [{ptA, ptY, ptZ}, {ptB, ptZ, ptX}, {ptC, ptX, ptY}]
]]
{-a^2 (a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 v - b^2 v + c^2 v) (a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 w + b^2 w - c^2 w),
 -b^2 (-a^2 u + b^2 u + c^2 u - a^2 v + b^2 v - c^2 v) (-a^2 v + b^2 v - c^2 v + a^2 w + b^2 w - c^2 w),
 -c^2 (-a^2 u + b^2 u + c^2 u - a^2 w - b^2 w + c^2 w) (a^2 v - b^2 v + c^2 v - a^2 w - b^2 w + c^2 w) }
```

Que Q esté sobre la circunferencia circunscrita a ABC equivale a decir que su conjugado isogonal es un punto del infinito. Si hacemos

```
ptQ1 = Factor[ConjugadoIsogonal[ptQ]]
{a^2 v - b^2 v + c^2 v - a^2 w - b^2 w + c^2 w,
 a^2 u - b^2 u - c^2 u + a^2 w + b^2 w - c^2 w, -a^2 u + b^2 u + c^2 u - a^2 v + b^2 v - c^2 v }
```

vemos que el punto Q es el conjugado isogonal del punto infinito

$$J = (S_Bv - S_Cw : S_Cw - S_Au : S_Au - S_Bv).$$

Razonemos que J es el punto del infinito de una recta perpendicular a PH .

En efecto, tenemos que $H = (S_AS_B : S_CS_A : S_AS_B)$ cumpliéndose que $S_AS_B + S_CS_A + S_AS_B = 4S^2$ y donde S el doble del área del triángulo ABC .

Por tanto, siendo $P = (u : v : w)$ la primera coordenada del punto del infinito de la recta PH será $4S^2u - (u + v + w)S_BS_C$, y la condición de perpendicularidad se escribe

$$\sum S_A (S_Bv - S_Cw) (4S^2u - (u + v + w)S_BS_C) = 0,$$

igualdad que puede comprobarse por multiplicación.

Entonces, el punto Q es el conjugado isogonal del punto infinito de una recta perpendicular a la recta PH .

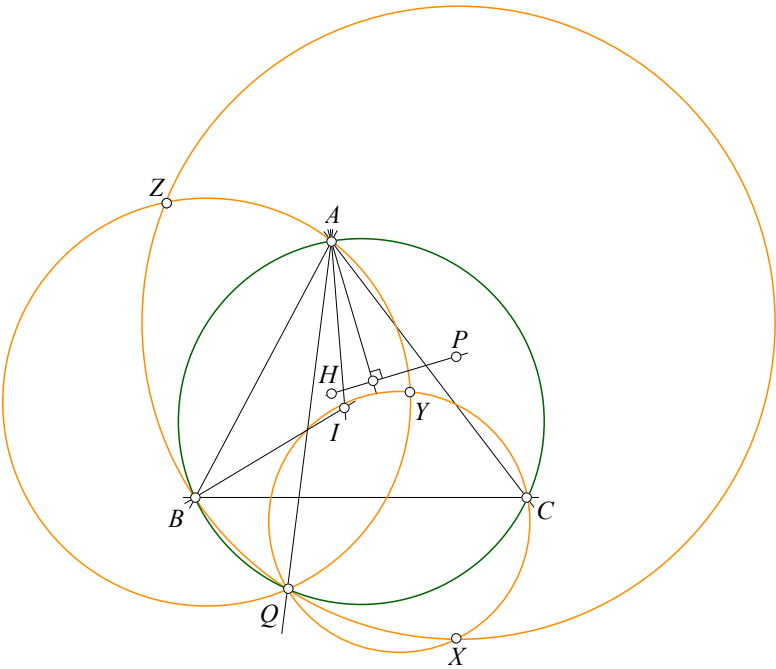


FIGURA 2

En la Figura 2 vemos que al trazar la perpendicular por A a PH y su simétrica respecto de la bisectriz AI obtenemos una recta que pasa por Q .

Según esto, todos los puntos P que estén en una misma recta que pasa por el ortocentro H darán lugar a un mismo punto Q .