

Problema 562

Siguen donats un triangle $\triangle ABC$ i un punt P .

Siguen X, Y, Z els punts simètrics de P respecte dels costats $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ del triangle, respectivament. Demostreu que les circumferències circumscrites als triangles $\triangle XYZ$, $\triangle YZA$, $\triangle ZXB$ i $\triangle ABC$, totes quatre s'intersecten en un punt.

Solució de Ricard Peiro i Estruch

:

Notem que per la simetria $\overline{CP} = \overline{CY}$, $\overline{CP} = \overline{CX}$.

$$\angle XCY = 2C$$

Anàlogament, $\overline{AP} = \overline{AY} = \overline{AZ}$, $\angle YAZ = 2A$.

Aleshores, $\angle AZY = 90^\circ - A$

Siga T el punt d'intersecció de les circumferències

circumscrites als triangles $\triangle XYZ$, $\triangle ABC$, distint de C .

Siga $\alpha = \angle ATY$.

El quadrilàter $TXCY$ és inscriptible, aleshores, $\angle YTX = 180^\circ - 2C$.

$$\angle YTC = \frac{1}{2} \angle YTX = 90^\circ - C.$$

$$\alpha = \angle ATY = \angle ATC - \angle YTC = B - (90^\circ - C) = 90^\circ - A.$$

Aleshores, $\angle AZY = \angle ATY$, per tant, T pertany a la circumferència que passa pels

punts AZY . Per tant, T pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\triangle YZA$

Anàlogament T pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ZXB$.

