

Problema 564.

Dada una hipérbola, las áreas de los triángulos que forman cualquier tangente con las asíntotas no varía.

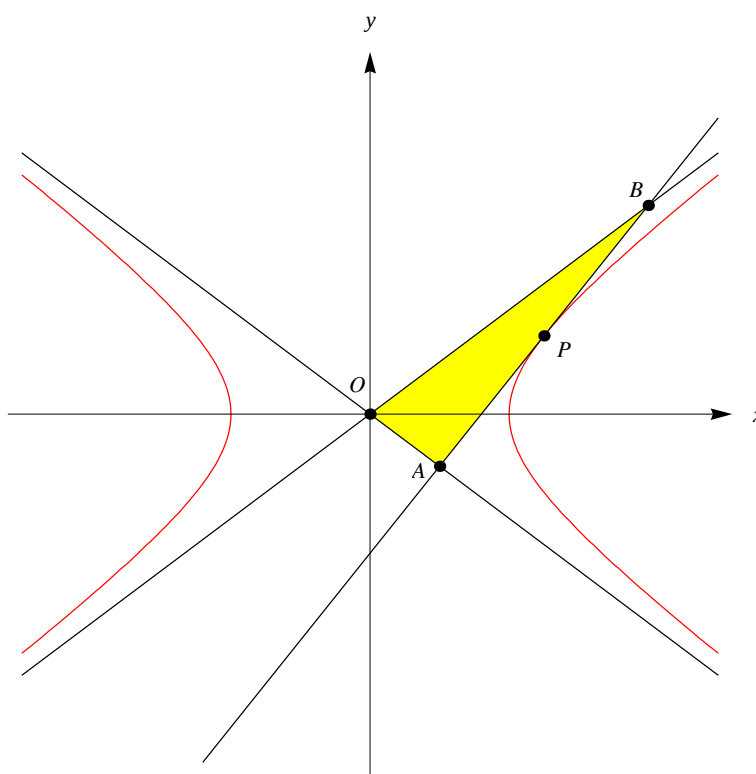
Naranjo, J.C. (2005)

Soluzione di Ercole Suppa.

Risolviamo il problema utilizzando un sistema di riferimento cartesiano avente come origine il centro dell'iperbole e come asse delle x l'asse trasverso. In tale sistema riferimento l'iperbole ha equazione del tipo

$$\mathcal{I}: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Sia $P(u, v)$ un generico punto di $\mathcal{I}$ e, tenuto della simmetria rispetto all'asse delle y , possiamo assumere, senza perdita di generalità, che $u > 0$.



La retta t , tangente ad $\mathcal{I}$ nel punto P , ha equazione

$$b^2ux - a^2vy = a^2b^2$$

La retta t interseca gli asintoti $y = -\frac{b}{a}x$ e $y = \frac{b}{a}x$, rispettivamente nei punti A, B di coordinate

$$\begin{aligned} A : \begin{cases} b^2ux - a^2vy = a^2b^2 \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases} &\Rightarrow A \left(\frac{a^2b}{bu - av}, -\frac{ab^2}{bu - av} \right) \\ B : \begin{cases} b^2ux - a^2vy = a^2b^2 \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases} &\Rightarrow B \left(\frac{a^2b}{bu + av}, \frac{ab^2}{bu + av} \right) \end{aligned}$$

Pertanto, l'area del triangolo formato dalla retta t con gli asintoti è data da:

$$[OAB] = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{a^2b}{bu-av} & -\frac{ab^2}{bu-av} & 1 \\ \frac{a^2b}{bu+av} & \frac{ab^2}{bu+av} & 1 \end{vmatrix} = \frac{a^3b^3}{(b^2u^2 - a^2v^2)}$$

Dato che $P \in \mathcal{I}$ si ha che

$$b^2u^2 - a^2v^2 = a^2b^2 \quad \Rightarrow \quad [OAB] = ab$$

e questo prova che l'area di $\triangle OAB$ non dipende dal punto P . □