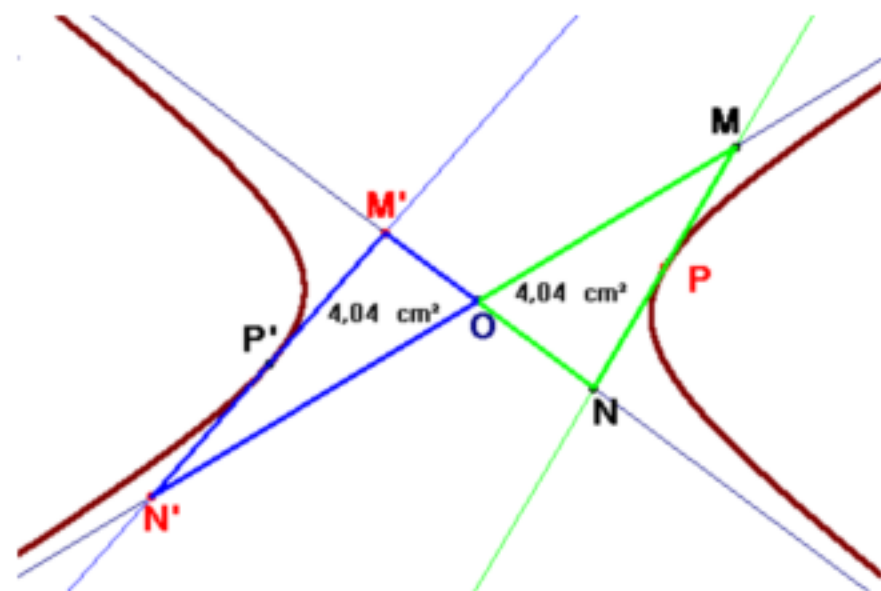


Problema 564.- Dada una hipérbola, las áreas de los triángulos que forman cualquier tangente con las asíntotas no varía.

http://atlas.mat.ub.es/personals/naranjo/geogebra/exemples_projectiva/area_triangle_hiperbola.html

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S. Fray Luis de León de Salamanca.



Si tomamos la forma reducida de la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm \frac{b}{a}x$.

La ecuación de la tangente en el punto $P(u,v)$ es $\frac{ux}{a^2} - \frac{vy}{b^2} = 1$. Los puntos de intersección con las asíntotas, resolviendo los sistemas correspondientes nos dan $M = \left(\frac{bu+av}{b}, \frac{bu+av}{a}\right)$ y $N = \left(\frac{bu-av}{b}, \frac{bu-av}{-a}\right)$.

Para el área del triángulo ponemos: $[ONM] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{bu-av}{b} & \frac{bu-av}{-a} \\ 1 & \frac{bu+av}{b} & \frac{bu+av}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (bu - av)(bu + av) \frac{2}{ab} = \frac{2a^2b^2}{2ab} = ab$. Así pues el área sólo

depende de los valores de los semiejes de la hipérbola. ■