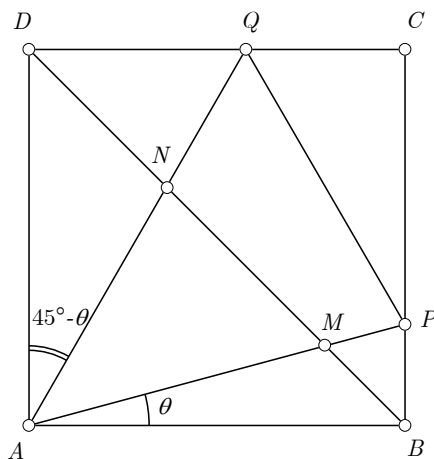


Problema 565.

Sea $ABCD$ un cuadrado. Por A se traza cualquier triángulo PAQ con P sobre BC , Q sobre CD y $\angle PAQ = 45^\circ$. Sean M y N los puntos de intersección de la diagonal BD con AP y AQ . Demostrar que $2(BM^2 + ND^2) = PQ^2$.

Propuesto por William Rodríguez Chamache. Profesor de geometría de la Academia integral Trujillo, Perú.

Soluzione di Ercole Suppa.



Supponiamo, senza perdita di generalità che $AB = 1$. Posto $\angle PAB = \theta$, dal teorema dei seni abbiamo:

$$MB = \frac{\sin \theta}{\sin(135^\circ - \theta)} = \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$ND = \frac{\sin(45^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ + \theta)} = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sqrt{2} \cos \theta}$$

da cui discende che

$$\begin{aligned} MB^2 + ND^2 &= \frac{2 \sin^2 \theta}{1 + \sin 2\theta} + \frac{1 - \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{1 - \cos^2 2\theta + 1 - \sin^2 2\theta}{(1 + \sin 2\theta)(1 + \cos 2\theta)} = \\ &= \frac{1}{(1 + \sin 2\theta)(1 + \cos 2\theta)} \end{aligned} \quad (1)$$

Dai triangoli rettangoli $\triangle ABP$ e $\triangle ACD$ abbiamo

$$AP = \frac{1}{\cos \theta}, \quad AQ = \frac{1}{\cos(45^\circ - \theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta + \sin \theta}$$

e pertanto, il teorema del coseno applicato al triangolo $\triangle PAQ$, fornisce:

$$\begin{aligned}
 PQ^2 &= AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos(\angle PAQ) = \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} - 2 \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta + \sin \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)^2 + 2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta (\cos \theta + \sin \theta)}{\cos^2 \theta (\cos \theta + \sin \theta)^2} = \\
 &= \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta (\cos \theta + \sin \theta)^2} = \\
 &= \frac{2}{(1 + \cos 2\theta)(1 + \sin 2\theta)} \tag{2}
 \end{aligned}$$

Dalla (1) e la (2) segue che

$$2(BM^2 + ND^2) = PQ^2$$

ed il problema è risolto. □