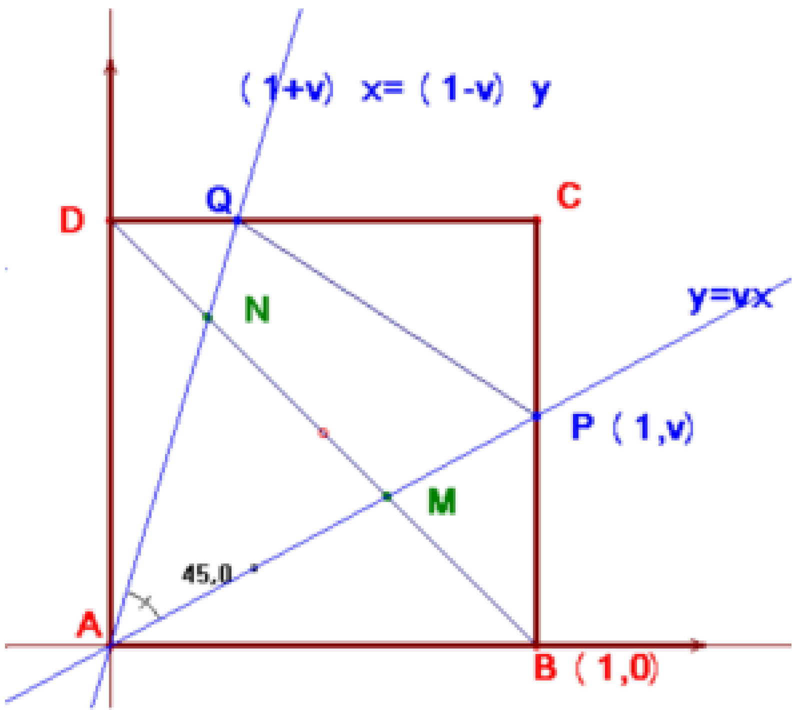
Propuesto por William Rodríguez Chamache. Profesor de geometría de la "Academia integral Trujillo- Perú.

***Problema* 565**.- *Sea ABCD un cuadrado. Por A se traza cualquier triángulo PAQ con P sobre BC, Q sobre CD y <PAQ=45º. Sean M y N los puntos de intersección de la diagonal BD con AP y AQ. Demostrar que 2(BM·BM +ND·ND)=PQ·PQ.*

Rodríguez, W. (2010): Comunicación personal.



Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S. *Fray Luis de León* de Salamanca.

Tomando coordenadas como se indica en la figura, con el punto *A* como origen y tomando el lado de longitud 1, si la recta que pasa por *A* y *P* tiene por ecuación *y=vx*, la que pasa por *A* y *Q* tiene como pendiente tg (45+<*PAB*) = $\frac{1+v}{1-v}$ y por tanto la ecuación de la misma es $y = \frac{1+v}{1-v}x$, $D = (0{,}1)$. La diagonal *BD* tiene ecuación $x + y = 1$. Con estos datos se calculan las coordenadas de los puntos que faltan:

$$Q = \left(\frac{1-v}{1+v}, 1\right);\ \ M = \left(\frac{1}{1+v}, \frac{v}{1+v}\right);\ N = \left(\frac{1-v}{2}, \frac{1+v}{2}\right).$$

A partir de esto calculamos los vectores $BM = \left(\frac{-v}{1+v}, \frac{v}{1+v}\right)$; $ND = \left(\frac{v-1}{2}, \frac{1-v}{2}\right)$ y $PQ = \left(\frac{-2v}{1+v}, 1-v\right)$. Calculando ahora las expresiones del enunciado: $2BM \cdot BM = 4\frac{v^2}{(1+v)^2}$, $2ND \cdot ND = (v-1)^2$ y $PQ \cdot PQ = \frac{4v^2}{(1+v)^2} + (1-v)^2$ se ve que se verifica la relación pedida. ■