Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo y un punto D sobre el lado BC.

Por D trazamos paralelas a AC y a AB que cortan a AB y CA en los puntos C_a y B_a, respectivamente. Por B_a y C_a se trazan paralelas al lado BC, cortando éstas a la ceviana AD, en los puntos B'_a y C'_a, respectivamente. Por B_a y C_a se trazan paralelas a la ceviana AD que cortan cada una al lado BC, en los puntos D_{ab} y D_{ac}, respectivamente.

a) Probar que las rectas $B_aC_a, D_{ab}C'_a$ y $D_{ac}B'_a$ concurren en un punto X.

b) Si $Y_a = DC_a \cap D_{ac}B'_a$ y $Z_a = DB_a \cap D_{ab}C'_a$, entonces los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{XY_aZ_a}$ son homotéticos. Hallar el centro, X^*, y la razón de homotecia.

c) Lugar geométrico descrito por cada uno de los puntos X, Y_a y Z_a, cuando D varía sobre BC.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **566**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado [(1)]:

Sea ABC un triángulo y d=AD una ceviana arbitraria con D su pie sobre el lado BC.

Por D trazamos paralelas a AC, AB lados del triángulo ABC que cortan a éstos, en los puntos H y F, respectivamente.

Por F,H se trazan paralelas al lado BC cortando éstas a la ceviana AD, en los puntos G e I, respectivamente.

Por F, H se trazan paralelas a la ceviana d=AD hasta que corte cada una al lado BC, en los puntos E, y J respectivamente.

Probar si es cierto o no que :

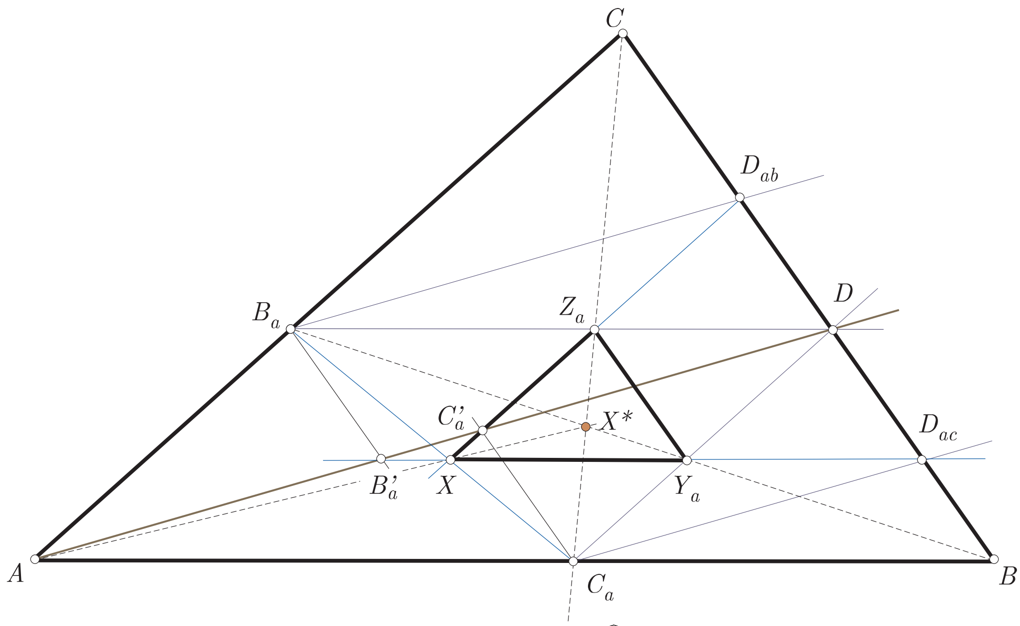
a) HF, JG, EI, se cortan en el punto X

b) Si Y=HD y JG, Z= DF y IE, entonces los triángulos ABC y XYZ son semejantes. Hallar su centro que denotamos por X, y su razón*

c)Lugar geométrico descrito por cada uno de los infinitos puntos siguientes : X, Y, Z, cuando D varía sobre BC.

Romero, J.B. (2010): Comunicación personal.

—— - ——



Utilizaremos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo $\widehat{ABC}$.

Supongamos que D es el pie de la ceviana AP de un punto $P(u : v : w)$, es decir, las coordenadas de D son $D(0 : v : w)$. La paralela por D al lado AC, $vx - wy + vz = 0$, corta a AB en $C_a(w : v : 0)$. La paralela por D

(1) Hemos cambiado ligeramente las notaciones en el enunciado original, para conservar las letras que se utilizan usualmente en la geometría del triángulo y para comentar un cierto resultado que se obtiene cuando se hace la misma construcción cíclicamente, tomando cevianas desde los vertices B y C.

a AB, $wx + wy - vz = 0$, corta a AC en $B_a(v : 0 : w)$. La paralela por C_a a BC, $vx - wy - wz = 0$, corta a la ceviana AD, $wy - vz = 0$, en $C'_a(w(v + w) : v^2 : vw)$. La paralela por B_a a BC, $wx - vy - vz = 0$, corta a AD en $B'_a(v(v+w) : vw : w^2)$. La paralela por C_a a AD, $vwx - w^2y + v(v+2w)z = 0$, corta a BC en $D_{ac}(0 : v(v+2w) : w^2)$. La paralela por B_a a AD, $vwx + w(2v + w)y - v^2z = 0$, corta a BC en $D_{ab}(0 : v^2 : w(2v + w))$.

a) Las rectas:

$$B_aC_a : \ vwx - w^2y - v^2z = 0, \quad D_{ab}C'_a : \ v^2x - w(2v + w)y + v^2z = 0, \quad D_{ac}B'_a : \ w^2x + w^2y - v(v + 2w)z = 0,$$

son concurrentes en el punto

$$X(2vw : v^2 : w^2).$$

b) Las rectas:

$$C_aD : \ vx - wy + vz = 0, \qquad D_{ac}B'_a : \ w^2x + w^2y - v(v + 2w)z = 0,$$

se cortan en $Y_a(vw : v(v + w) : w^2)$. Y las rectas:

$$B_aD : \ wx + wy - vz = 0, \qquad D_{ab}C'_a : \ v^2x - w(2v + w)y + v^2z = 0,$$

se cortan en $Z_a(vw : v^2 : w(v + w))$.

Las rectas:

$$AX : \ w^2y - v^2z = 0, \qquad BY_a : \ wx - vz = 0, \qquad CZ_a : \ vx - wy = 0,$$

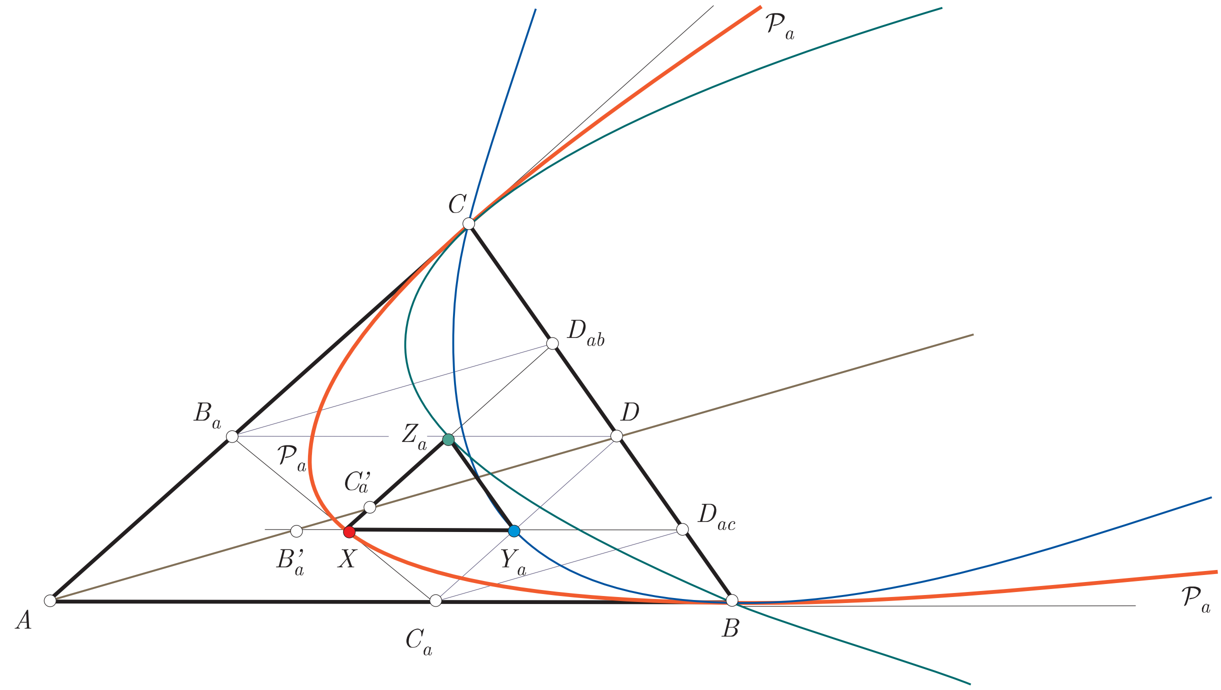
se cortan en $X^*(vw : v^2 : w^2)$; luego, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{XY_aZ_a}$ son perspectivos, y como además sus lados homólogos son paralelos, ellos son homotéticos, con centro de homotecias en X^*. Son paralelos, ya que los puntos del infinitos de las rectas:

$$Y_aZ_a : \ (-v^2 - vw - w^2)x + vwy + vwz = 0, \quad Z_aX \ w^2x + w^2y - v(v + 2w)z = 0, \quad XY_a : \ v^2x - w(2v + w)y + v^2z = 0,$$

son respectivamente los puntos del infinito de los lados BC, CA y AB, esto es $(0 : 1 : -1), (-1 : 0 : 1)$ y $(1 : -1 : 0)$.

La razón de semejanza $X^*X : X^*A = vw : (v + w)^2$.

c) Al variar D en BC, el lugar geométrico que describe X, cuyas coordenadas las podemos poner de la forma $(2t : 1 : t^2)$, es la parábola, $\mathcal{P}_a$, de ecuación $x^2 - 4yz = 0$, perteneciente al haz de cónicas bitangentes a los lado CA y AB en los puntos C y B, respectivamente. Además, como esta parábola contiene el punto medio de la mediana por A [2], ya tenemos elementos suficientes para construirla



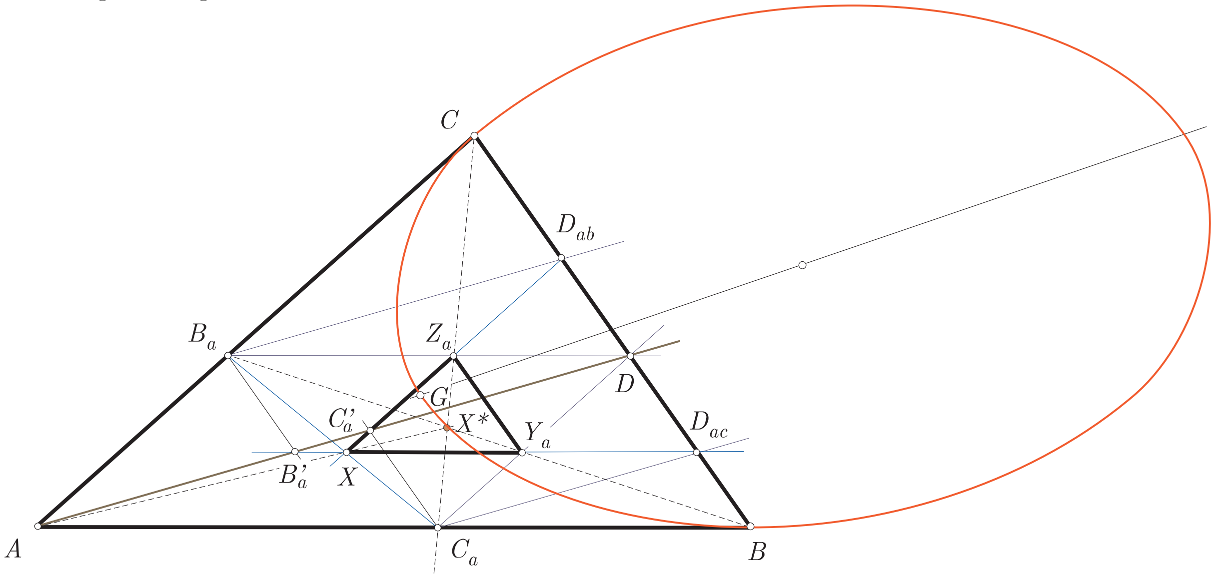
El lugar geométrico de los puntos $Y_a(t : 1+t : t^2)$, cuando D varía, es la parábola de ecuación $x^2 + z(x - y) = 0$, que forma parte del haz de cónicas bitangentes a las rectas AB y la mediana por C en los puntos B y C, respectivamente. Otro punto de esta parábola es el punto medio del lado $A'C'$ del triángulo medial.

[2] Este es un hecho general en toda parábola, esto es: "Si en una parábola, M es el punto medio de una cuerda y N es el punto de concurrencia de las tangentes en los extremos de dicha cuerda, entonces el punto medio de MN está en la parábola".
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejco1386.pdf, http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejco1674.pdf

El lugar geométrico de los puntos $Z_a(t:1:t(1-t))$, cuando D varía, es la parábola de ecuación $x^2+y(x-z)=0$, que forma parte del haz de cónicas bitangentes a las rectas AC y la mediana por B en los puntos C y B, respectivamente. Esta parábola contiene al punto medio del lado $A'B'$ del triángulo medial de $\widehat{ABC}$.

NOTAS ADICIONALES:

• Cuando D varía en BC el centro de homotecia X^* de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{XY_aZ_a}$, describe una elipse bitangente a AB y AC en los puntos B y C y que pasa por el baricentro. Su ecuación es $x^2-yz=0$ y su centro tiene de coordenadas $(-1:2:2)$, es decir, es el punto que divide a la mediana por A en la razón $-4:1$, es decir, punto simétrico del baricentro respecto al punto medio del lado BC.



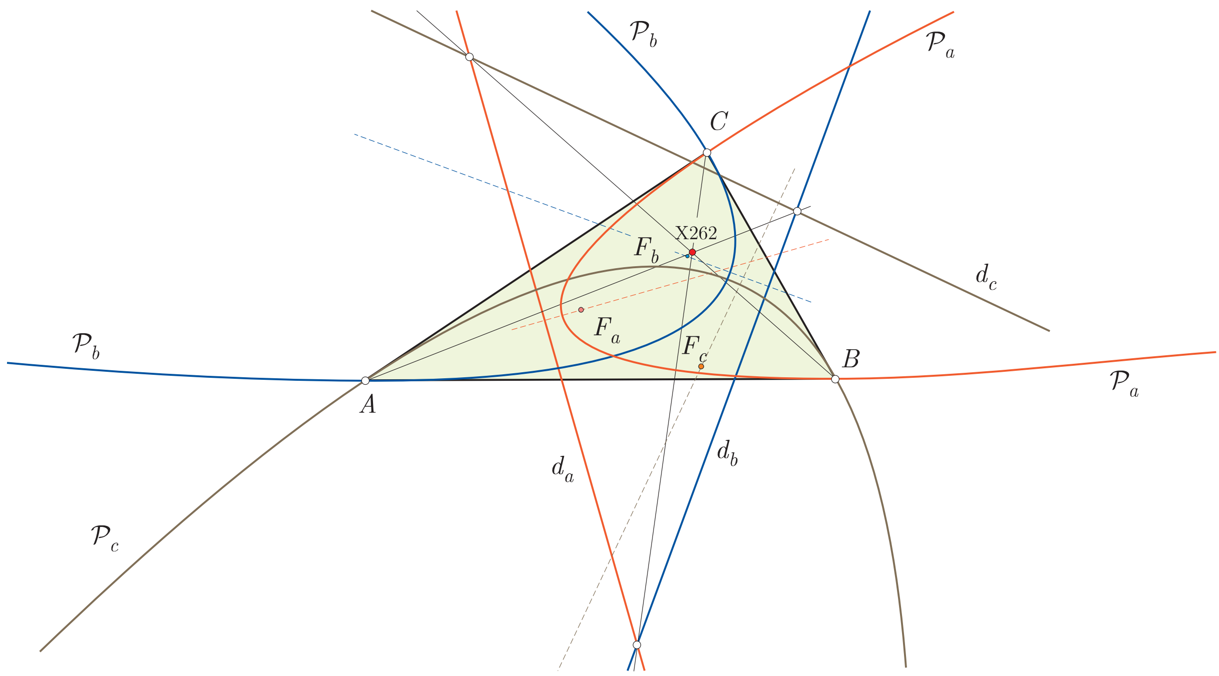
• El foco de la parábola $\mathcal{P}_a:\ x^2-4yz=0$ es el punto de coordenadas $F_a(b^2+c^2-a^2:b^2:c^2)$ y su directriz, polar del foco, es $d_a:\ (a^2-b^2-c^2)x+2c^2y+2b^2z=0$.

• Si tomamos, en vez de D en BC, puntos E y F en CA y AB, respectivamente, y procediendo cíclicamente, haciendo la mismas construcciones anteriores partiendo de F y E, obtenemos otras dos parábolas

$$\mathcal{P}_b:\ y^2-4zx=0, \qquad \mathcal{P}_c:\ z^2-4xy=0,$$

con directrices respectivas:

$$d_b:\ 2c^2x+(-a^2+b^2-c^2)y+2a^2z=0, \qquad d_c:\ 2b^2x+2a^2y+(-a^2-b^2+c^2)z=0.$$



Las tres directrices d_a, d_b y d_c forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el punto (X_{262} en ETC) conjugado isogonal del punto medio segmento de extremos en el circuncentro y simediano (diámetro de Brocard):

$$\left(\frac{1}{a^4 - a^2(b^2+c^2) - 2b^2c^2} : \frac{1}{b^4 - b^2(c^2+a^2) - 2c^2a^2} : \frac{1}{c^4 - c^2(a^2+b^2) - 2a^2b^2}\right).$$

• Si D, E y F son los pies de las cevianas por un punto $P(u : v : w)$, se obtienen los puntos Y y Z, de forma análoga a como se obtuvo el punto X, y sus coordenadas son:

$$X(2vw : v^2 : w^2), \qquad Y(u^2 : 2wu : w^2), \qquad Z(u^2 : v^2 : 2uv).$$

Se concluye que los triángulo $\widehat{ABC}$ y $\widehat{XYZ}$ son perspectivos y su centro de perspectividad es el cuadrado baricéntrico de $(u^2 : v^2 : w^2)$ de P.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2430.pdf