Problema 566 de triánguloscabri. *Sea ABC un triángulo y $d = AD$ una ceviana arbitraria con D su pie sobre el lado BC. Por D trazamos paralelas a AC, AB lados del triángulo ABC que cortan a éstos, en los puntos H y F, respectivamente. Por F, H se trazan paralelas al lado BC cortando éstas a la ceviana AD, en los puntos G e I, respectivamente. Por F, H se trazan paralelas a la ceviana $d = AD$ hasta que corte cada una al lado BC, en los puntos E, y J respectivamente. Probar si es cierto o no que :*

a) *HF, JG, EI se cortan en el punto X.*

b) *Si $Y = HD \cap JG$, $Z = DF \cap IE$, entonces los triángulos ABC y XYZ son semejantes. Hallar su centro que denotamos por X^*, y su razón.*

c) *Lugar geométrico descrito por cada uno de los infinitos puntos X, Y, Z cuando D varía sobre BC.*

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

a) Puede verse la solución del problema 77 de La Gaceta de la RSME [1]. También podemos usar coordenadas baricéntricas.

Llamando $D = (u : v : w)$, podemos calcular:

$F = (v : 0 : w)$, $H = (w : v : 0)$, $I = (w(v + w) : v^2 : vw)$,

$G = (v(v+w) : vw : w^2)$, $J = (0 : v(v+2v) : w^2)$ y $E = (0 : v^2 : w(2v+w))$.

A partir de aquí podemos calcular las rectas

$$\begin{aligned} FH :& - vwx + w^2y + v^2z = 0,\\ EI :& v^2x - w(2v + w)y + v^2z = 0,\\ JG :& w^2x + w^2y - v(v + 2w)z = 0, \end{aligned}$$

que concurren en el punto $X = (2vw : v^2 : w^2)$.

b) Las recta $HD : vx - wy + vz = 0$ y $JG : w^2x + w^2y - v(v + 2w)z = 0$ se cortane en $Y = (vw : v(v + w) : w^2)$. Asimismo, la recta $FD : wx + wy - vz = 0$ y $EI : v^2x - w(2v + w)y + v^2z = 0$ se cortan en $Z = (vw : v^2 : w(v + w))$.

Las coordenadas de los puntos Y y Z tienen la misma suma, por lo que al restarlas, obtenemos el punto del infinito de la recta YZ, así tenemos que el punto del infinito de YZ es $(0 : vw : -vw) = (0 : 1 : -1)$, es decir YZ es paralelo a BC.

Con las rectas ZX y XY podemos hacer lo mismo, obteniendo que son paralelas a CA y AB, respectivamente, por tanto, los triángulos ABC y XYZ son homotéticos.

Para hallar el centro de homotecia, calculamos, por ejemplo el punto

$$X^* = BY \cap CZ = (vw : v^2 : w^2).$$

[1] `www.rsme.es/gacetadigital/abrir.php?id=787`

Con coordenadas baricéntricas, la fórmula de la distancia entre los puntos $P = (u_1 : v_1 : w_1)$ y $Q = (u_2 : v_2 : w_2)$ es

$$PQ^2 = \frac{\sum\limits_{\text{cíclica}} S_A \left((v_1 + w_1)u_2 - (v_2 + w_2)u_1\right)^2}{(u_1 + v_1 + w_1)(u_2 + v_2 + w_2)}.$$

Entonces podemos obtener que

$$\frac{YZ}{BC} = \frac{BD \cdot DC}{BC^2},$$

que sería la razón de homotecia entre los triángulos XYZ y ABC.

c) Al eliminar v y w de $(x : y : z) = (2vw : v^2 : w^2) = X$ obtenemos la cónica $x^2 = 4yz$, tangente a la recta del infinito $x + y + z = 0$ en $(y + z)^2 = 4yz \Rightarrow (y - z)^2 = 0$, es decir en el punto $(-2 : 1 : 1)$, punto del infinito de la mediana trazada por A. Esta parábola es tangente en B y C a los lados AB y AC, respectivamente.

Al eliminar v y w de $(x : y : z) = (vw : v(v + w) : w^2) = Y$ obtenemos la cónica $x^2 = z(y - x)$. Su corte con la recta del infinito viene dado por $x^2 = (-x - y)(y - x) = x^2 - y^2 \Rightarrow y^2 = 0$, por lo que la cónica es una parábola, tangente a la recta del infinito en $(1, 0, -1)$, punto del infinito de la recta CA, por lo que la directriz es paralela a la recta CA. Esta parábola pasa por C y es tangente en B a la recta AB.

De forma similar al punto Y calculariamos el lugar del punto Z.