

En un triángulo $\widehat{ABC}$ cuyo ángulo en C es de 30° , se construye sobre el lado AB un triángulo equilátero hacia el exterior. Demostrar que con los segmentos CA, CB y CD se puede construir un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN:

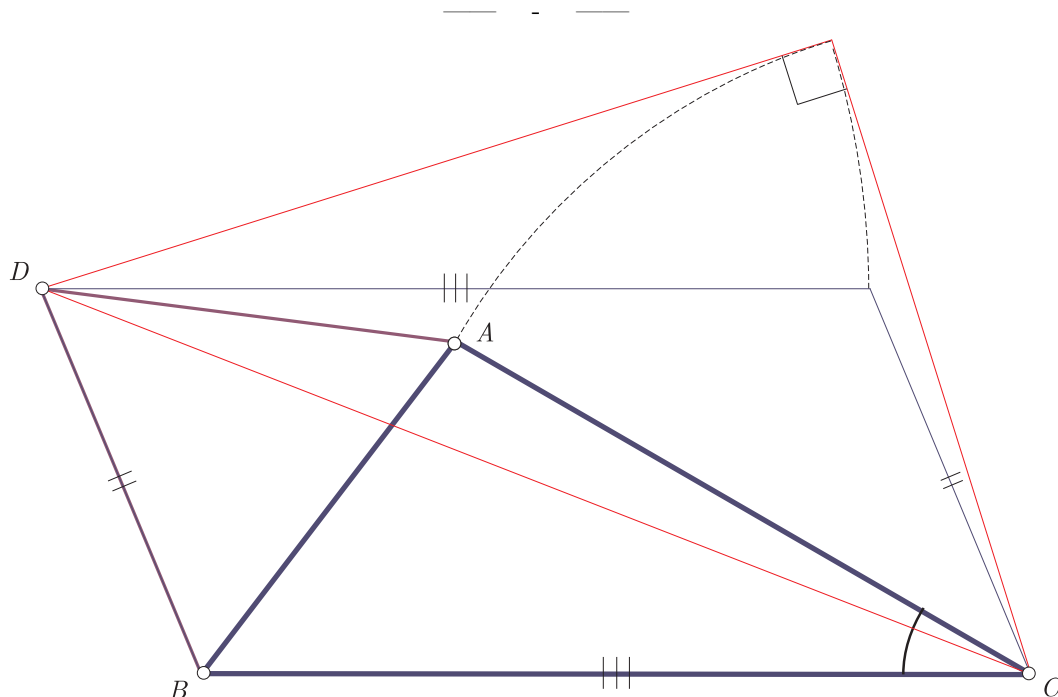
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **567**.

<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Con el siguiente enunciado:

En un triángulo ABC cuyo ángulo C es de 30° , se construye sobre el lado AB un triángulo equilátero hacia el exterior. Demostrar que con los segmentos CA, CB y CD se puede construir un triángulo rectángulo.

Rabinowitz, S. (1963): Mathematics Student Journal 10, 6



Usando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo $\widehat{ABC}$ y resultados dados por Paul Yiu en "Introduction to Triangle Geometry", de los que indicamos números de párrafos y páginas, podemos obtener sin dificultad la propiedad enunciada.

De la fórmula de Conway (P. Yiu, §3.4.2, p. 34 o en A. Montesdeoca. Geometría con coordenadas baricéntricas. <http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf#geoba-formula-Conway>) se deduce que las coordenadas de D son:

$$D\left(S_B + \frac{S}{\sqrt{3}} : S_A + \frac{S}{\sqrt{3}} : -c^2\right).$$

Siendo S el doble del área de $\widehat{ABC}$, $S_A = S \cotag A$, $S_B = S \cotag B$, $S_C = S \cotag C$.

El cuadrado de la distancia entre C y D (§7.1, p. 88) da:

$$\overline{CD}^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}S).$$

Como en el caso particular que nos ocupa $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi/6)$ y $S = ab \sin(\pi/6)$, al sustituir en la última fórmula da $\overline{CD}^2 = a^2 + b^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2$, por lo que con los segmentos CA, CB y CD se puede construir un triángulo rectángulo.