Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo escaleno en el que una altura, una bisectriz interior y una mediana (cada una de las cevianas anteriores parten de un vértice distinto) son iguales. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h_a = v_b = m_c$. Demostrar que las longitudes de los lados del triángulo $\widehat{ABC}$ cumplen la siguiente relación:

$$3a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0.$$

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **570**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

> *Sea ABC un triángulo escaleno en el que una altura, una bisectriz interior y una mediana (cada una de las cevianas anteriores parten de un vértice distinto) son iguales. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que* $h_a = w_b = m_c$. *Demostrar que las longitudes de los lados del triángulo ABC cumplen la siguiente relación:*
>
> $3a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0$
>
> *Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva.*

—— - ——

Los cuadrados de la magnitudes de la altura h_a desde el vértice A, de la bisectriz v_b en el vértice B y de la mediana m_a por A, son:

$$h_a^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4a^2}, \quad v_b^2 = \frac{ac(a+b+c)(a-b+c)}{(a+c)^2}, \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2).$$

El que $h_a = m_c$ implica que $3a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0$. Por lo que la condición del enunciado es necesaria para la igualdad de las magnitudes que se citan.

Si exigimos que además h_a y m_c coincidan con v_b, obtenemos las relaciones:

$$a^4 + c^4 - a^2b^2 + 4a^3c - 2ab^2c - 2a^2c^2 - b^2c^2 = 0, \qquad 2a^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 8ab^2c - 7a^2c^2 + 2b^2c^2 - 6ac^3 = 0.$$

Con estas relaciones obtenidas entre los lados de un triángulo, cabe preguntarse: ¿existen triángulos para los cuales $h_a = v_b = m_c$? y si existen ¿pueden construirse con regla y compás?