Problema 570 de triánguloscabri. *Sea ABC un triángulo escaleno en el que una altura, una bisectriz interior y una mediana (cada una de las cevianas anteriores parten de un vértice distinto) son iguales. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h_a = w_b = m_c$. Demostrar que las longitudes de los lados del triángulo ABC cumplen la siguiente relación:*

$$3a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0.$$

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán: Si S es el área del triángulo ABC, teniendo en cuenta que

$$h_a^2 = \frac{4S^2}{a^2} = \frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{a^2},$$
$$m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right),$$

podemos calcular

$$m_c^2 - h_a^2 = \frac{3a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2c^2 - 2b^2c^2}{4a^2},$$

por lo que la igualdad $h_a = m_c$ implica que

$$3a^4 + b^4 + c^4 - 3a^2c^2 - 2b^2c^2 = 0. \tag{1}$$

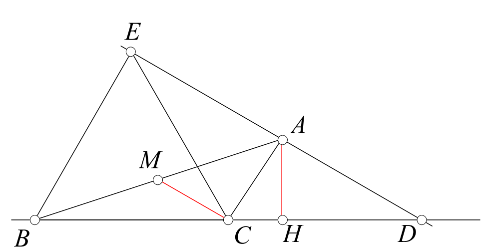
Observaciones:

1. Hemos visto que, independientemente del valor de w_a, la relación (1) es una condición necesaria para que se cumpla $m_a = h_c$.

2. ¿Qué triángulos ABC cumplen la condición (1)? Si fijamos los vértices B y C sobre una recta de manera que $B = (-1, 0)$ y $C = (1, 0)$, y consideramos $A = (x, y)$ variable, entonces tenemos las relaciones

$$a = 2,$$
$$b = \sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$
$$c = \sqrt{(x+1)^2 + y^2},$$

y la igualdad (1) se convierte en $3y^2 = (x-3)^2$, o $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$, que nos lleva a la siguiente construcción: Fijados B y C sobre una recta, construimos el triángulo equilátero EBC sobre BC, y trazamos por E la perpendicular a BE, que cortará en D a la recta BC (D el punto simétrico de B respecto de C). Tomamos A arbitrario sobre DE. Si $B = (-1, 0)$ y $C = (1, 0)$ entonces la recta DE tiene ecuación $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$, por lo que el triángulo ABC cumplirá $h_a = m_c$.



Un resultado simétrico se obtendría construyendo el triángulo equilátero EBC al otro lado de la recta BC.

3. Para obtener un triángulo ABC que cumpla $h_a = w_b = m_c$, si tenemos en cuenta que
$$w_b^2 = \frac{ac(a-b+c)(a+b+c)}{(a+c)^2},$$
podemos obtener que $h_a^2 = w_b^2$ equivale a la relación
$$2a^4 + 2a^2b^2 + 8ab^2c - 7a^2c^2 + 2b^2c^2 - 6ac^3 - c^4 = 0.$$
Ahora, si eliminamos c de esta relación y de (1) obtenemos que o bien es $a = b$ o bien se cumple
$$b^8 - 36a^2b^6 + 326a^4b^4 - 84a^6b^2 + 817a^8 = 0,$$
y escribiendo $b = ka$, llegamos a
$$k^8 - 36k^6 + 326k^4 - 84k^2 + 817 = 0.$$
Desafortunadamente, las soluciones de esta ecuación no pueden construirse con regla y compás, por lo que debemos conformarnos con una solución aproximada. La siguiente figura muestra la única posibilidad cuando situamos B y C de manera que $B = (-1, 0)$ y $C = (1, 0)$.