

Problema 573.- Sea ABC un triángulo acutángulo. Consideremos las cevianas que partiendo desde cada vértice del mismo pasan por su circuncentro. Sean D, E, F los pies de estas cevianas respecto de los lados BC, AC y AB del triángulo, respectivamente.

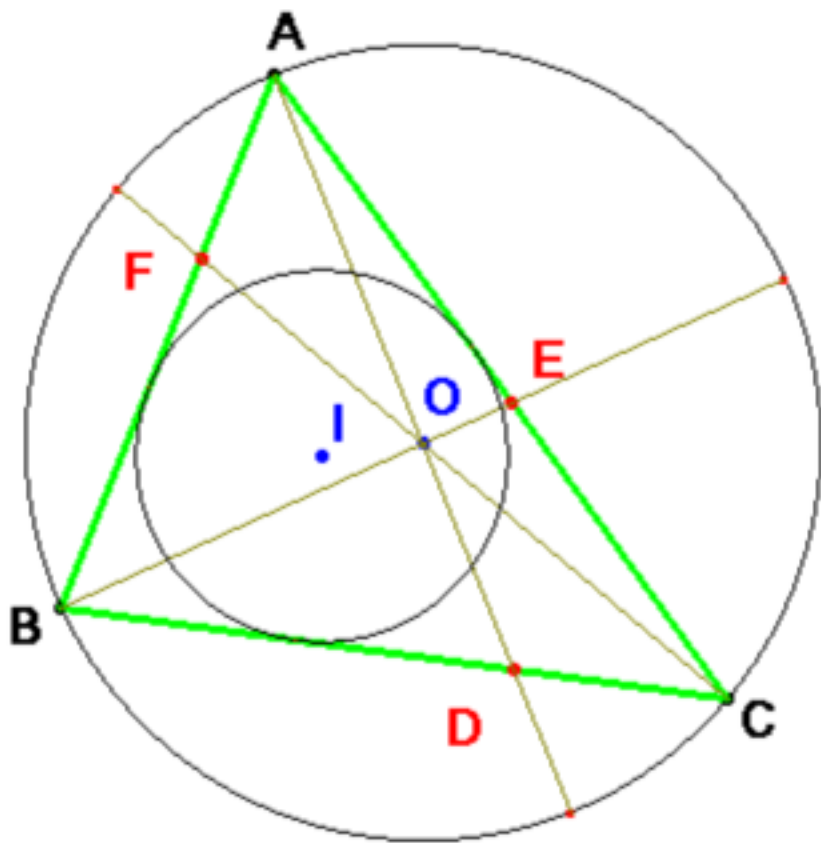
- (a) Demostrar que al menos uno de los segmentos OD, OE, OF es mayor o igual que el radio de la circunferencia inscrita al triángulo.
- (b) Demostrar que se puede refinar el apartado anterior y garantizar que al menos uno de los segmentos OD, OE, OF anteriores, es mayor o igual que la mitad del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Nota: Evidentemente, a partir de la desigualdad de Euler-Chapple $R \geq 2r$, el apartado (a) se deduce como corolario del apartado (b) que es un resultado más fuerte. Por otra parte, se puede intentar demostrar (a) sin demostrar primero (b). Vicario, V.(2010): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor del I.E.S. Fray Luis de León de Salamanca.

a)

Supongamos que los segmentos OD, OE, OF son todos ellos de **menor** longitud que el radio r de la circunferencia inscrita.El



área Δ del triángulo ABC es la suma de las áreas de los tres triángulos definidos desde el circuncentro. Sus alturas son evidentemente, menores (o iguales en algún caso) a las longitudes de los segmentos OD, OE, OF . Así pues podemos poner:

$$2\Delta \leq a \cdot OD + b \cdot OE + c \cdot OF < (a + b + c) \cdot r = 2pr = 2\Delta.$$

Lo que es imposible, por tanto es cierta la proposición a).

b) Procederemos de forma similar. Si OD, OE, OF son de longitud **menor** que la mitad del radio R de la circunscrita,

$$2\Delta = 2pr \leq a \cdot OD + b \cdot OE + c \cdot OF <$$

$$(a + b + c) \cdot \frac{R}{2} = pR = 2\Delta.$$

Y esto no es cierto en general, pues en algún caso (tr. equilátero) se da la igualdad. ■