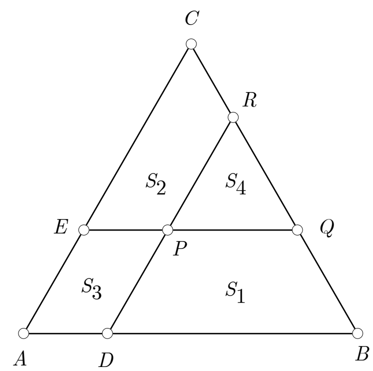
Problema 574.

Dado el triángulo equilátero $\triangle ABC$ de lado 1. Determinar el punto D del lado AB y el punto E del lado AC que al trazar paralelas por D al lado AC, y por E al lado AB, determinan 4 regiones S_1, S_2, S_3, S_4 del triángulo tal que las áreas están en progresión aritmética. (ver figura).



Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES Abastos, València.

Tribunal de Oposiciones de Secundaria, Valencia (2010)

Soluzione di Ercole Suppa.

Posto $AD = x$ ed $AE = y$ abbiamo

$$DB = 1 - x, \qquad CE = 1 - y, \qquad QR = 1 - x - y$$

Pertanto:

$$S_1 + S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x)^2 \tag{1}$$

$$S_2 + S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-y)^2 \tag{2}$$

$$S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x-y)^2 \tag{3}$$

Dalla (1) e la (3) segue che:

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(1-x)^2 - (1-x-y)^2\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}(2-2x-y)y \tag{4}$$

Dalla (2) e la (3) segue che:

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(1-y)^2 - (1-x-y)^2\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}(2-2-2y)x \tag{5}$$

Dato che S_3 è un parallelogramma la sua area è espressa da:

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}xy \tag{6}$$

Se le aree S_1, S_2, S_3, S_4 sono in progressione aritmetica, risulta:

$$S_2 - S_1 = S_3 - S_2 = S_4 - S_3 \tag{7}$$

Usando le relazioni (3), (4), (5) e (6) possiamo calcolare le differenze $S_i - S_{i-1}$:

$$S_2 - S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(2 - x - 2y) - (2 - 2x - y)y\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2x - 2y - x^2 + y^2\right)$$
$$S_3 - S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[2xy - (2 - x - 2y)x\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4xy + x^2 - 2x\right)$$
$$S_4 - S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(1 - x - y)^2 - 2xy\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y\right)$$

Dalle (7) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 + y^2 = 4xy + x^2 - 2x \\ 4xy + x^2 - 2x = 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 4x + 2y + 4xy = 0 \\ y^2 - 2y + 1 - 4xy = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Tenuto conto che $x \leq 1$, l'unica soluzione accettabile è $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Sostituendo tale valore nell'equazione

$$y^2 - 2y + 1 - 4xy = 0$$

con semplici calcoli, si ricava che

$$y^2 + 2\left(\sqrt{2} - 3\right)y + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 3 - \sqrt{2} \pm \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}$$

L'unico valore accettabile è $y = 3 - \sqrt{2} - \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}$ in quanto

$$y = 3 - \sqrt{2} - \sqrt{10 - 6\sqrt{2}} > 1$$

Abbiamo quindi dimostrato che le aree delle quattro regioni S_1, S_2, S_3, S_4 sono in progressione aritmetica se

$$AD = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \qquad AE = 3 - \sqrt{2} - \sqrt{10 - 6\sqrt{2}} \tag{8}$$

I segmenti AD ed AE, definiti dalle formule (8), sono costruibili con riga e compasso. $\square$