

Una circunferencia de Droz-Farny escondida en un problema

(con motivo del Problema 600 de *triánguloscabri*)

Francisco Javier García Capitán

1. Introducción

En este escrito de nuevo usamos el ordenador para investigar las soluciones de problemas geométricos, y lo que quizá es más interesante, descubrir nuevos problemas.

Usaremos el programa *Mathematica* junto con las rutinas incluidas en el archivo *baricentricas.nb*, disponible en

<http://garciacapitan.auna.com/baricentricas>

2. Un problema y su generalización

Comenzamos. En la revista *Kömal* (Mathematical and Physical Journal for Secondary Schools), encontramos el siguiente problema y su solución:

Problema 1 (Kömal B4287). *Los centros de las circunferencias exinscritas del triángulo ABC son I_a , I_b y I_c . Sean Q un punto interior del triángulo, diferente del centro de la circunferencia inscrita. El pie de las perpendiculares trazadas desde Q sobre las bisectrices son Q_a , Q_b y Q_c . Demostrar que los triángulos $I_aI_bI_c$ y $Q_aQ_bQ_c$ son semejantes.*

Sabemos que el triángulo excentral $I_aI_bI_c$, formado por los excentros es el triángulo anticeviano del incentro I . Por tanto podemos intentar generalizar este problema sustituyendo el incentro por cualquier otro punto P . De esta manera, enunciamos el problema así:

Problema 2. *Sea ABC un triángulo y P un punto. Sea $P_aP_bP_c$ el triángulo anticeviano de P respecto de ABC . Para cada punto Q llamemos Q_a , Q_b , Q_c a las proyecciones ortogonales de Q sobre las cevianas AP , BP , CP , respectivamente. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P tales que $Q_aQ_bQ_c$ es semejante a $P_aP_bP_c$ para cualquier punto Q ?*

3. Cálculos

Usamos la función `CuadradoDistancia`, que calcula el cuadrado de la distancia entre dos puntos, para hallar el lugar de los puntos P tales que $P_a P_b / P_a P_c = Q_a Q_b / Q_a Q_c$:

```
<< Baricentricas` ;

ptP = {x, y, z};
{ptPa, ptPb, ptPc} = TrianguloAnticeviano [ptP];
ptQ = {u, v, w};
{ptQa, ptQb, ptQc} = Map[Pie[ptQ, #] &,
  {Recta[ptA, ptPa], Recta[ptB, ptPb], Recta[ptC, ptPc]}}];
Numerator[Factor[
  
$$\frac{\text{CuadradoDistancia}[ptQa, ptQb]}{\text{CuadradoDistancia}[ptQa, ptQc]} - \frac{\text{CuadradoDistancia}[ptPa, ptPb]}{\text{CuadradoDistancia}[ptPa, ptPc]}$$

]]
- 2 x z^2 (a^2 x^2 - b^2 x^2 - c^2 x^2 - a^2 y^2 + b^2 y^2 - c^2 y^2 - a^2 z^2 - b^2 z^2 + c^2 z^2)
(c^2 x^2 y - b^2 x^2 z + a^2 y^2 z - a^2 y z^2)
```

Los factores no triviales corresponden a una cónica y a una cúbica.

La ecuación de la cúbica no es simétrica, es decir, depende del vértice A y hay otras dos cúbicas correspondientes a los otros vértices del triángulo. Una figura rápida muestra que hay tres cúbicas que se cortan en cuatro puntos: el incentro y los excentros del triángulo ABC .

```
xmin = ymin = - 4;
xmax = ymax = 6;
cubic = c^2 x^2 y - b^2 x^2 z + a^2 y^2 z - a^2 y z^2;
Show[Map[GraficaBaricentricas, TernaCiclica[cubic]]]
```

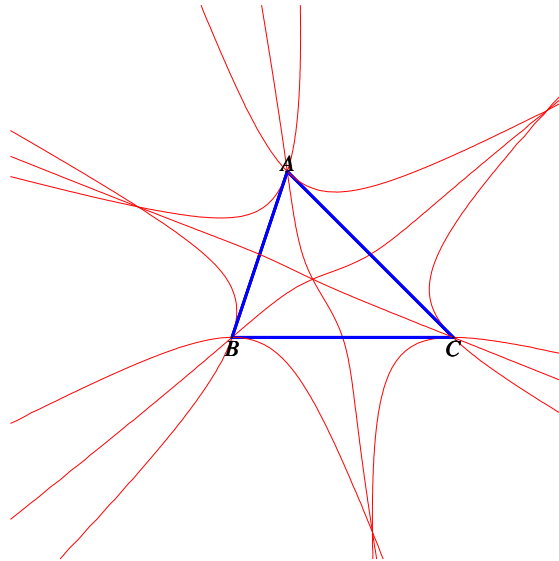


FIGURE 1: Tres cúbicas cortándose en los incentros

Ahora examinemos la cónica. En este caso, la ecuación es simétrica respecto de los tres vértices. Podemos usar **EsCircunferencia** y **CentroConica** para comprobar que de hecho esta cónica es una circunferencia centrada en el ortocentro de ABC . Llamamos Γ a esta circunferencia.

```
conic = -a^2 x^2 + b^2 x^2 + c^2 x^2 + a^2 y^2 - b^2 y^2 + c^2 y^2 + a^2 z^2 + b^2 z^2 - c^2 z^2;
EsCircunferencia[conic]
```

```
True
```

```
Factor[CentroConica[conic]]
```

```
{(a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2), -(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2), -(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)}
```

Para hallar el cuadrado del radio de Γ , calculamos un punto de intersección con la recta BC y usamos la función **CuadradoDistancia**:

```
ptX = Simplificar[{0, y, z}
 /. Simplify[Solve[Factor[conic /. x -> 0] == 0, y], z > 0][[1]]];
ρ2 = Factor[Simplify[CuadradoDistancia[ptH, ptX]]]

(a^2 - b^2 - c^2) (a^2 + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + c^2)
-----
2 (a - b - c) (a + b - c) (a - b + c) (a + b + c)
```

También podemos expresar esta fórmula en términos del circunradio R , el inradio r y el semiperímetro p (usamos aquí la letra p para el semiperímetro ya que la variable s tiene asignado el valor $\frac{1}{2}(a + b + c)$). Para hacer esto, usamos la función **TransformarCociente** (para expresiones sin denominador podemos usar **Transformar**).

```
TransformarCociente[ρ2]
```

```
-(p - r - 2 R) (p + r + 2 R)
```

4. La circunferencia polar del triángulo

De los cálculos anteriores obtenemos que la circunferencia Γ está centrada en el ortocentro y tiene un radio ρ que cumple

$$\begin{aligned}\rho^2 &= -4R^2 \cos A \cos B \cos C \\ &= (2R + r)^2 - s^2 \\ &= 4R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).\end{aligned}$$

Esta circunferencia es conocida y se llama *circunferencia polar* del triángulo ABC (por ejemplo, ver el apartado 6.2 de [1]).

La primera fórmula de ρ indica que la circunferencia polar sólo es real cuando el triángulo es obtusángulo.

La segunda fórmula puede usarse para hacer una construcción con regla y compás de la circunferencia polar, aunque una construcción más sencilla se

deriva del hecho de que también es $\rho^2 = HA \cdot HD$, considerando distancias con signo, y siendo D el pie de la altura trazada por A .

Para dar una interpretación a la última fórmula de ρ , recordemos un teorema y su corolario ([2, §425]):

Teorema. *Si se trazan circunferencias iguales con centros en los vértices de un triángulo, cortarán a los lados del triángulo medial en seis puntos que están en una circunferencia centrada en el ortocentro (circunferencia de Droz-Farny)*

Corolario. *Si λ es el radio de las circunferencias iguales centradas en los vértices del triángulo y ρ es el radio de la circunferencia obtenida con centro H entonces*

$$\rho^2 = 4R^2 + \lambda^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

De acuerdo con el corolario, la fórmula $\rho^2 = 4R^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ indica que la circunferencia polar es una circunferencia de Droz-Farny minimal, con $\lambda = 0$, siendo imaginarias en este caso todas las intersecciones de las circunferencias con centros A, B, C y radio 0 con los lados triángulo medial.

Por ejemplo, la ecuación de la circunferencia degenerada centro A y radio 0 es $c^2y^2 + b^2z^2 + 2S_Ayz = 0$, y la recta que une los puntos medios de AB y AC es $x = y + z$. La intersección está formada por los puntos $(a^2 : S_C \pm iS : S_B \mp iS)$, donde S es el doble del área de ABC . Observemos que estos son los puntos circulares del infinito, que pertenecen a cualquier circunferencia del plano.

5. Los triángulos semejantes $P_aP_bP_c$ y $Q_aQ_bQ_c$

Hagamos la figura correspondiente al triángulo anticeviano $P_aP_bP_c$ de un punto P que está sobre la circunferencia polar y dibujemos los triángulos semejantes $P_aP_bP_c$ y $Q_aQ_bQ_c$.

Observamos el siguiente resultado:

Problema 3. *Para cualquier punto P sobre la circunferencia polar, el triángulo $P_aP_bP_c$ está inscrito también en dicha circunferencia polar.*

Solución. La circunferencia polar tiene una ecuación que podemos expresar en la forma $S_Ax^2 + S_By^2 + S_Cz^2 = 0$. Por tanto si $P = (u : v : w)$ cumple esta ecuación, también la cumplirán los puntos $P_a = (-u : v : w)$, $P_b = (u : -v : w)$ y $P_c = (u : v : -w)$.

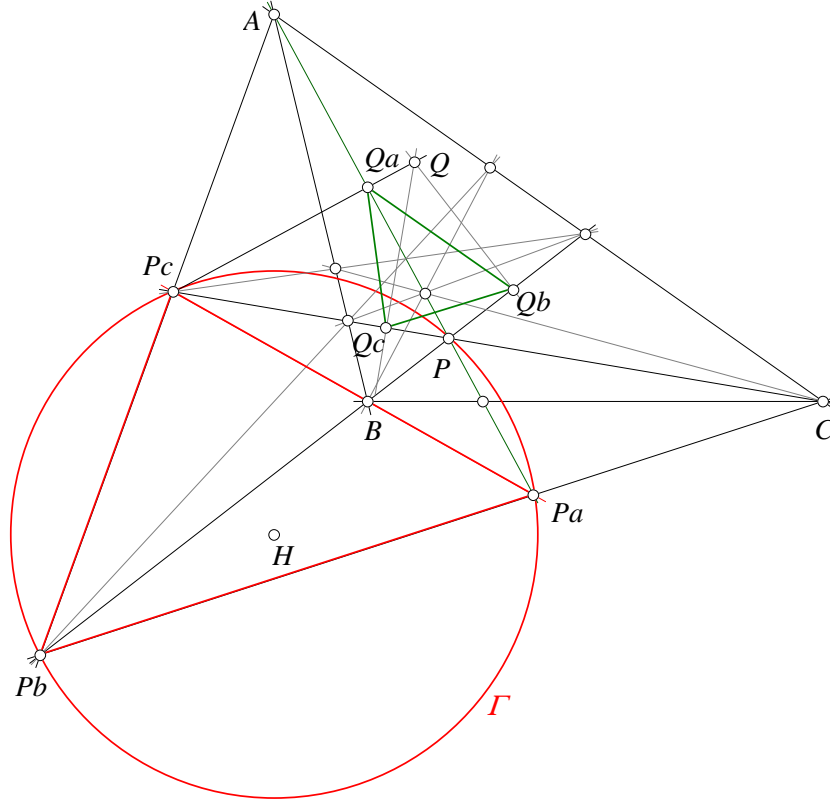


FIGURE 2: Los triángulos semejantes $P_aP_bP_c$ y $Q_aQ_bQ_c$

Intercambiando los papeles de los triángulos $P_aP_bP_c$ y ABC obtenemos el siguiente enunciado:

Problema 4. Sea $P_aP_bP_c$ el triángulo ceviano de un punto P sobre la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC . Para cualquier punto Q , sean Q_a, Q_b, Q_c las proyecciones ortogonales de Q sobre las cevianas de P . Demostrar que los triángulos ABC y $Q_aQ_bQ_c$ son semejantes.

Es más, podemos querer saber si solo los puntos de la circunferencia circunscrita cumplen esta propiedad. Para ello, estudiamos la razón $Q_aQ_b/Q_aQ_c = AB/AC$ y comprobamos que es cierta cuando P está sobre la circunferencia circunscrita o sobre la hipérbola $b^2(x+y)z = c^2(z+x)y$, que es una hipérbola equilátera circunscrita al triángulo. Por tanto, el ortocentro también cumple el enunciado.

Se invita al lector a completar este escrito con soluciones de los problemas propuestos y con posteriores investigaciones sobre los temas aquí tratados.

Referencias

- [1] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. *Retorno a la Geometría*. DLS-EULER Editores, 1993.
- [2] Johnson, R. A. *Advanced Euclidean Geometry*. Dover, Nueva York, 1960.