

UN PROBLEMA DE PHILIPPE DE LA HIRE.

José María Pedret

2009

0. INTRODUCCION AL PROBLEMA

En 1679 Philippe De La Hire publicó su obra *Nouveaux Elémens des sections coniques, la construction, ou effecton des équations.*

NOUVEAUX ELEMENS
DES
SECTIONS CONIQUES,
LES LIEUX GEOMETRIQUES,
LA CONSTRUCTION, OU EFFECTON
DES EQUATIONS,
*Par M. DE LA HIRE de l'Academie
Royale des Sciences.*



A PARIS,
Chez ANDRÉ PRALARD, rue Saint
Jacques, à l'Occasion.

M. DC. LXXIX.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

En el primer capítulo de *Les lieux géométriques*, donde trata de la resolución de los problemas geométricos, como segundo ejemplo de un problema determinado, presenta el siguiente enunciado:

SECOND EXEMPLE

D'UN PROBLEME DETERMINE'.

Il faut décrire le triangle AEF, dont la somme AB des deux côtes AE, EF est donnée, l'angle AEF compris par ces mêmes côtes, & la perpendiculaire EG menée du sommet E de cet angle au côté opposé AF.

DESCRIBIR EL TRIÁNGULO AEF , DEL QUE SE DA LA SUMA AB DE LOS DOS LADOS AE , EF , EL ÁNGULO AEF COMPENDIDO POR ESOS LADOS Y LA PERPENDICULAR EG DESDE EL VÉRTICE E DE ESE ÁNGULO AL LADO OPUESTO AF .

La intención, al realizar este documento, es la de mostrar y comentar distintas soluciones que, con el tiempo, han ido apareciendo. Para lo anterior, veremos distintas referencias vinculadas al problema en estudio. El punto de partida de esas referencias es la reseña bibliográfica que del problema hace Nathan Altshiller-Court.

Este trabajo pretende también poner de manifiesto algunos enunciados auxiliares que facilitan la resolución del problema original.

Acabaremos este escrito viendo una serie de otros problemas que se desprenden del problema de Philippe De La Hire, que son variaciones del mismo o pertenecen a la misma familia de métodos de resolución.

No hace falta mencionar que cualquier información, relacionada con lo expuesto en los párrafos anteriores, será siempre bienvenida; pues es también nuestra intención que éste sea un documento vivo capaz de aumentar y/o mejorar su contenido.

Todo en aras de la “Bella Geometría” como diría mi amigo Francisco Javier García Capitán.

1. REFERENCIAS AL PROBLEMA

Nathan Altshiller-Court, en su libro *College Geometry. An introduction to the modern Geometry of the triangle and the circle, second edition revised and enlarged*, Barnes & Noble, Inc. New York 1952 y en la página 143, §292 introduce este problema incluyendo, al final de la obra, las siguientes tres referencias:

1.1 PHILIPPE DE LA HIRE,

Nouveaux éléments des sections coniques ..., p. 196. Según Nathan Altshiller-Court la resolución se ejecuta por medio de cónicas; pero no es el procedimiento real seguido por De La Hire, que lo reduce a hallar las raíces de una ecuación de segundo grado.

Philippe De La Hire empieza suponiendo que el problema está resuelto. Estudia la figura y pone de manifiesto los datos conocidos del problema. Establece, en la figura modificada, tres incógnitas para las que halla tres ecuaciones vinculadas (problema determinado), de las que puede eliminar dos y resolver el problema.

Las tres ecuaciones que se plantea De La Hire son:

$$\begin{array}{ll} (1) & 0 = xy + cy - 2bc, \\ (2) & 0 = zy + dx - dc, \\ (3) & 0 = z^2 - x^2 - d^2, \end{array}$$

donde x, y, z son variables y a, b, c son magnitudes conocidas. Las ecuaciones (1) y (3) son cónicas; no lo es la (2). z es la base del triángulo buscado.

1.2 SIMON A. J. LHUILIER,

Elémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques. Librairie J. J. Paschoud. (Paris and Geneva, 1809)., pp. 220-221.

El problema se encuentra en el capítulo V, *Aplicación de los lugares geométricos a la solución de problemas elementales determinados*, contenido en el §132.

LHuillier muestra como aplicar el cálculo y el análisis algebraico a la determinación de un triángulo. En la página 214, propone 9 ecuaciones útiles para problemas de triángulos. Propone a continuación 12 aplicaciones y un ejercicio para esas ecuaciones. En la sexta aplicación, deduce una expresión algebraica de la base del triángulo buscado que depende sólo de los datos del enunciado propuesto:

$$b = \sqrt{s^2 + \frac{1}{4}h^2 \cot^2 \frac{1}{2}S} - \frac{1}{2}h \cot \frac{1}{2}S$$

donde b es la semi-base del triángulo buscado, s es la semi-suma dada de los lados, h es la altura dada y S es el ángulo dado.

1.3 NATHAN ALTSHILLER-COURT,

American Mathematical Monthly (1927), p. 161, remark IV, bibliography.

Nathan Altshiller-Court, además de presentar en su libro una solución en la que usa una propiedad de la recta de Simson, en el ejemplar de *American Mathematical Monthly* (1927), propone, con el número 3.178, un problema análogo al que nos ocupa; pero en el que se da la diferencia de lados en lugar de la suma.

En la primera observación, se nos indica un procedimiento alternativo. En la solución, se busca PM , donde P es el punto de intersección del círculo circunscrito del triángulo buscado y de la bisectriz del ángulo A , en el mismo triángulo; siendo M el punto medio de la base BC de ese triángulo. En la solución alternativa se procede a la determinación de PW , donde W es el punto de intersección de la bisectriz por A , en el triángulo buscado, y la base de ese triángulo.

En la segunda observación, dice que una solución trigonométrica al problema 3.178 que aparece en *Mathesis*, junio de 1926, página 286. La solución es sin autor determinado y en ella aparecen las siguientes relaciones trigonométricas para el problema cuando lo que se proporciona es la diferencia de lados en lugar de la suma:

Los datos son ángulo A , altura h y diferencia $u = b - c > 0$. Así, las fórmulas

$$h = b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B \quad \text{y} \quad u = b - c$$

dan
$$h (\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C) = u \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C,$$

de donde se deduce la ecuación de segundo grado en $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(B - C)$:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(B - C) + 2h \operatorname{sen} \frac{1}{2}A \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B - C) - u \cos^2 \frac{1}{2}A = 0.$$

Poniendo
$$h \operatorname{sen} \frac{1}{2}A = u \cos \frac{1}{2}A \cot \varphi,$$

se encuentra
$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(B - C) = \cos \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}\varphi.$$

Francisco Javier García Capitán, en cuanto a una resolución trigonométrica del problema de diferencias, me traslada lo siguiente de **Anteas Hatzipolakis** desde **Hyacinthos**:

$$\begin{aligned} b - c &= 2R(\sin B - \sin C) = 2R \cdot 2\sin \frac{1}{2}(B - C) \cos \frac{1}{2}(B + C) \\ &= 4R \sin \frac{1}{2}(B - C) \sin \frac{1}{2}A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_a &= 2R \sin B \sin C = R(\cos(B - C) - \cos(B + C)) = R(\cos(B - C) - \cos A) \\ &= R((1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}(B - C)) + \cos A) \end{aligned}$$

dos ecuaciones con dos incógnitas: R , $\sin \frac{1}{2}(B - C)$.

En la tercera observación, Nathan Altshiller-Court, señala que su solución, para el problema con la diferencia de lados, descrita en *American Mathematical Monthly* (1927), nº 3.871 también puede ser seguida en el caso de que en lugar de la diferencia d , se dé la suma de lados s de AB y AC . El papel de la bisectriz externa de A lo desempeña entonces la bisectriz interna de este ángulo. Por lo tanto, podemos resolver el problema: $b + c$, A , h .

En la cuarta observación del artículo en *American Mathematical Monthly* (1927), que indica Altshiller-Court como referencia en su libro, dice que el caso con la suma de lados fue resuelto en *American Mathematical Monthly* (1917), páginas 329-330; que Emile Lemoine resolvió el problema en 1885 en el *Journal de Mathématiques Élémentaires* (de Longchamps), página 199; y que el problema salió también en *Mathesis* (1905), páginas 79-80, donde aparecen diversas soluciones que también explicitaremos.

Hay que decir que es Elizabeth B. Davis, del U. S. Naval Observatory, quien presenta, en *American Mathematical Monthly* (1917), páginas 329-330, una solución del problema que está propuesto con el número 505, por O. S. Adams del Coast and Geodetic Survey, Washington, D. C.

1.4 EMILE LEMOINE,

en el *Journal de Mathématiques Élémentaires* (de Longchamps) (1885), página 199, en el problema XLIX dentro de sus “*exercices divers de mathématiques élémentaires*” nos propone el problema de Philippe De La Hire.

La solución de Emile Lemoine, se basa en buscar la base del triángulo propuesto por medio de un triángulo auxiliar del que deduce el trazado sencillo de una proporción y de un triángulo rectángulo; todo ello a partir de un punto D sobre la bisectriz exterior de BAC .

Emile Lemoine añade que para tratar la cuestión con cálculo, tendríamos que resolver con incógnitas a , b , c las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} b + c &= m \\ ah &= bc \sin A \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \end{aligned}$$

y que su resolución y la discusión de los valores encontrados es un buen ejercicio que se puede proponer con las cuestiones siguientes:

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ABC Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADOS UN ÁNGULO A , LA BISECTRIZ DE ESTE ÁNGULO Y LA SUMA DE LOS OTROS DOS.

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ABC Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADAS LA BASE BC , LA MEDIANA Y LA BISECTRIZ DESDE A .

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ABC Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADOS UN ÁNGULO CAB , LA DIFERENCIA $AC - AB$ DE LOS DOS LADOS QUE COMPRENDEN ESTE ÁNGULO Y LA ALTURA DESDE A HASTA BC .

La solución del último problema es análoga a la del caso que nos ocupa ya que se conoce la suma $AC + AB$, el punto D está, en este caso, sobre la bisectriz del ángulo interior BAC en lugar de estar sobre la del ángulo exterior.

En *Mathesis* (1904), página 128, se propone nuestro problema con el número 1.471, sin citar al proponente, y se pide una solución geométrica del mismo. Como respuesta a lo anterior, en *Mathesis* (1905), páginas 79-80, aparecen las indicaciones de M. Emmerich, H. Lez, Emile Weber y Cl. Servais.

1.5 M. EMMERICH

señala que los libros alemanes dan varias soluciones elementales de esta cuestión y que presenta, la que cree más simple del libro de H. Lieber y F. von Lühmann, *Geometrische Konstruktions-Aufgaben*; Leonhard Simion, Berlín 1882.

Emmerich parte del primer procedimiento de los que presentan Lieber y Lühmann. Es similar al de Altshiller-Court; pero prueba la alineación de puntos mediante cuadriláteros inscritos y no con la recta de Simson, e inscribe un segmento en el círculo circunscrito de un cuadrilátero y no de un triángulo. Mientras Lieber y von Lühmann deducen la ecuación a resolver, Emmerich lo convierte en otro problema conocido y más sencillo:

POR EL PUNTO MEDIO E DEL ARCO BEC DE UN CÍRCULO TRAZAR UNA SECANTE QUE ENCUENTRE A LA CUERDA BC EN U Y AL CÍRCULO EN A , DE TAL MANERA QUE AU TENGA UNA LONGITUD DADA, t . EN ESTE CASO t ES LA ALTURA DADA.

Nathan Altshiller-Court, en su *College Geometry. An introduction to the modern Geometry of the triangle and the circle*, en el capítulo III Properties of the triangle, B The circumcircle, en el §83 trata este problema auxiliar.

M. Emmerich en su discusión sobre la posibilidad de solución, se plantea determinar la restricción $h \leq \frac{1}{2}(b + c) \cos \frac{1}{2}A$ por medio de la trigonometría y aunque no la usa para la construcción, en la discusión de su método, M. Emmerich deduce la ecuación que lleva a la solución de Simon A. J. L'Huilier.

Este mismo señor añade una observación en la que dice que este problema se puede vincular con los casos donde se conoce $b - c$ en lugar de $b + c$, o $B - C$ en lugar de A .

Más adelante veremos como Lieber y von Lühmann tratan el problema original.

1.6 H. LEZ (ADOLPHE DESBOVES)

hace saber que el problema, que nos ocupa, se encuentra resuelto en la página 313 de M. Desboves: *Questions de Géométrie élémentaire*, 2^e édition, Delagrave. París (1875).

Adolphe Desboves, en el capítulo III de la segunda parte de su libro *Questions de Géométrie*, presenta en el §205, desde la página 310 hasta la página 332, *Problemas sobre la construcción de triángulos*. Son 16 enunciados de los que el autor presenta, en cada uno de ellos, varias soluciones y observaciones. Como enunciado VI, en la página 313, nos propone un enunciado algo más general que el que nos ocupa:

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ABC CONOCIDO EL ÁNGULO A , LA ALTURA AH , Y LA SUMA, LA DIFERENCIA, EL PRODUCTO O LA RAZÓN DE LOS LADOS QUE COMPREN-
DEN EL ÁNGULO DADO.

Adolphe Desboves basa su solución en la búsqueda del siguiente lugar, después de prolongar el lado AB en una cantidad AE igual a AC :

UN ÁNGULO CONSTANTE CAE GIRA ALREDEDOR DE SU VÉRTICE A , Y UNO DE SUS LADOS ENCUENTRA UNA RECTA FIJA BC EN EL PUNTO C ; SE TOMA SOBRE EL OTRO LADO UNA LONGITUD AE IGUAL A AC : SE PIDE EL LUGAR DEL PUNTO E .

Después de ello, reduce el problema propuesto al conocido como Problema de Pappus:

POR UN PUNTO A , TOMADO SOBRE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO, TRAZAR UNA RECTA TAL, QUE LA PARTE BE , INTERCEPTADA ENTRE LOS LADOS DEL ÁNGULO, TENGA UNA LONGITUD DADA.

Podemos encontrar una solución al Problema de Pappus en Nathan Altshiller-Court, *College Geometry*, página 63, §84

1.7 EMILE WEBER

presenta también una solución puramente geométrica. El problema se reduce a construir las tangentes comunes a una parábola y a un círculo cuyo centro se encuentra sobre el eje de la parábola. Se efectúa esta construcción, sin trazar la parábola como aparece en una observación que se publica en el *Journal de Vuibert* (1902), página 153: por la que se sustituye la parábola por otra circunferencia ya que una tangente común a una parábola y a una circunferencia, que tenga su centro A sobre el eje, es tangente a una segunda circunferencia de centro A' simétrico de A respecto al foco, y cuyo eje radical con la circunferencia A es la tangente por el vértice de la parábola.

1.8 CL. SERVAIS

proporciona una solución basada en trazar las mismas tangentes que Emile Weber; pero reduce su trazado a determinar los puntos dobles de una involución y luego trazar las tangentes desde esos puntos al círculo de centro A y radio la altura dada.

Nota. Dice Servais que cada tangentes solución es una base del triángulo buscado; pero en realidad las dos tangentes desde uno de los puntos sí proporcionan dos triángulos solución simétricos respecto al eje de la parábola; mientras que las tangentes desde el otro punto proporcionan dos triángulos cuyo ángulo es $\pi - A$ y cuya diferencia de lados es el segmento dado como suma de lados de la solución anterior.

Servais expone a continuación una discusión sobre la realidad de las soluciones que dependerán de las tangentes que se puedan trazar en cada situación.

CL. Servais muestra que con su método puede resolverse el mismo problema cuando, en lugar de la suma o diferencia de lados, conocemos el producto k^2 de los mismos.

Aún más, indica que se puede resolver el problema más general:

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO, CONOCIDO UN ÁNGULO Y LA ALTURA TRAZADA DESDE EL VÉRTICE DEL ÁNGULO AL LADO OPUESTO, CUANDO LOS OTROS DOS LADOS b Y c ESTÁN LIGADOS POR LA RELACIÓN

$$b c + \alpha (b + c) + \beta^2 = 0,$$

DONDE α Y β SON LONGITUDES DADAS.

1.9 ELIZABETH B. DAVIS,

del U. S. Naval Observatory, en *American Mathematical Monthly* (1917), páginas 329 a 330 presenta una solución del problema que está propuesto con el número 505, por O. S. Adams del Coast and Geodetic Survey, Washington, D. C. La solución se reduce, como en los casos de Weber y Servais, a trazar una tangente común a un círculo y una parábola. El trazado de dicha tangente es algo más elaborado que el de Emile Weber.

Elizabeth B. Davis añade una demostración de su construcción de la que se desprende que existen dos posibles soluciones.

1.10 H. LIEBER Y F. VON LÜHMANN.

en su ya mencionada obra *Geometrische Konstruktions-Aufgaben*, en el §53, presentan veinte construcciones de triángulos que tienen en común que el triángulo a construir encuentra a una transversal (ceviana) arbitraria dada. Entre ellos se encuentra un grupo de ejercicios 7, 8, 9, 10 que se resuelven de forma similar:

7. EL PROBLEMA QUE NOS OCUPA, $a + b, h_c, C.$

8. SABEMOS LA DIFERENCIA DE LADOS Y NO LA SUMA, $a - b, h_c, C.$

9. SABEMOS LA SUMA DE LADOS Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS, $a + b, h_c, A - B.$

10. SABEMOS LA DIFERENCIA DE LADOS Y DE ÁNGULOS, $a - b, h_c, A - B.$

Se presenta un primer análisis, común para los cuatro problemas, que lleva a una solución basada en hallar dos segmentos cuando se conocen su diferencia y su producto. Esto puede encontrarse en el §. 139, b, 7 y 8 Del mismo texto.

Para los números 7 y 8 también presenta un segundo análisis adicional que conduce a encontrar la base del triángulo buscado mediante un triángulo rectángulo.

Por último y exclusivamente para 7, el problema que nos ocupa, presentan un tercer análisis en el n° 217 del segundo apéndice de las ediciones más modernas del texto. En este caso se utilizan las relaciones armónicas que inducen los círculos inscritos y se reduce el problema al siguiente

DADOS DOS PUNTOS P Y P' , SE DEBE DIVIDIR ARMÓNICAMENTE A PP' MEDIANTE UN SEGMENTO DE LONGITUD a .

Enunciado que se introduce en el n° 97 de ese mismo apéndice.

1.11 JUAN SAPIÑA BORJA.

Fuera del origen de todas las referencias anteriores, encontramos la solución debida al profesor Juan Sapiña Borja.

Juan Sapiña Borja nos presenta una solución, distinta a las mencionadas hasta aquí, en sus *Problemas gráficos de geometría*, Litograf, Madrid 1955, página 254, nº 377. En este magnífico libro, Juan Sapiña reduce el problema a colocar un segmento igual a la suma de los lados entre los lados de un ángulo igual al dado y en el que el segmento en cuestión pasa por un punto determinado de la bisectriz de dicho ángulo.

Sapiña realiza un análisis de la figura, supuesta resuelta, y a partir de este análisis indica la respuesta pero no la prosigue hasta la resolución final. Esta resolución final puede atacarse, según sus indicaciones, resolviendo el problema siguiente:

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO CONOCIENDO SU BASE, EL ÁNGULO OPUESTO A ESA BASE Y LA BISECTRIZ DE ESE ÁNGULO.

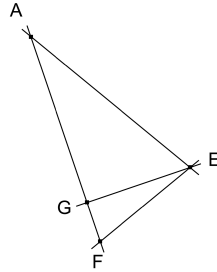
Una construcción para este último problema, a parte de la ya mencionada de Lieber y von Lüthmann para E. Emmerich, se encuentra en Luis Lopes, *Manuel de construction de triangles*. QED -TEXTE, Quebec 1996, página 58, ejercicio 28.

Pero a partir del planteamiento y análisis de Juan Sapiña, también podemos finalizar la resolución aprovechándonos del famoso "*Problema de Pappus*" ya mencionado en la solución de Adolphe Desboves.

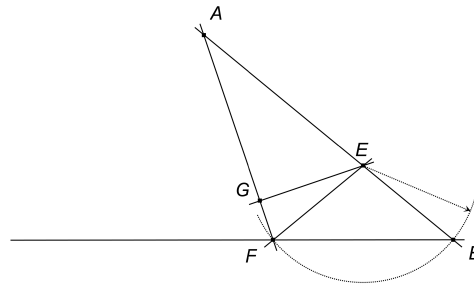
2. ANALISIS DEL PROBLEMA

2.1 ANALISIS - PHILIPPE DE LA HIRE.

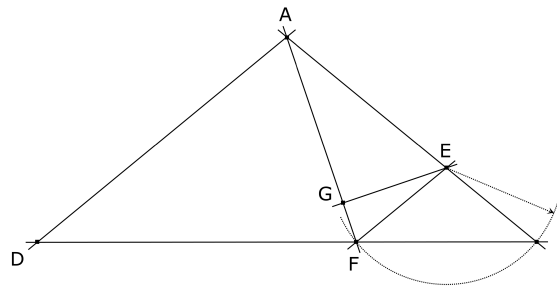
Construir el triángulo AEF , conocidos la suma AB de los dos lados AE , EF , el ángulo AEF entre esos lados, y la perpendicular EG desde el vértice E de ese ángulo al lado opuesto AF .



Supongamos el problema resuelto y sea el triángulo solución AEF .



Si prolongamos AE hasta B , de modo que AB sea igual a la suma dada de los dos lados AE , EF , la recta EB será igual a EF ,



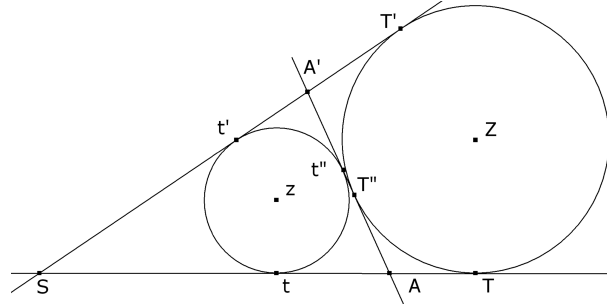
y si trazamos AD paralela a EF e igual a AB , la recta BD pasará por F , pues

$$BE : EF = BA : AD,$$

y AD y EF son paralelas.

2.2 ANALISIS - SIMON A. J. LHUILIER.

Construir un triángulo conociendo A , h_a , $b + c$.



Estas son las 9 ecuaciones que desarrolla Lhuilier: Sea ASA' un triángulo con un círculo inscrito de centro z , cuyos puntos de tangencia con SA , SA' , y AA' son respectivamente t , t' y t'' . Y un círculo ex-inscrito de centro Z , cuyos puntos de tangencia con SA , SA' , y AA' son respectivamente T , T' y T'' .

- (1) ST es el semiperímetro $\frac{1}{2}C$ del triángulo; y los segmentos AT , St , At , son respectivamente los excesos del semiperímetro sobre los lados:

$$AT = \frac{1}{2}C - SA, \quad St = \frac{1}{2}C - AA', \quad At = \frac{1}{2}C - SA'.$$

(2) $At \cdot AT = zt \cdot ZT.$

(3) $SZ \cdot Sz = SA \cdot SA'.$

(4) $Sz : St = 1 : \sen \frac{1}{2}S$
 $SZ : ST = 1 : \sen \frac{1}{2}S.$

(5) $Sz : zt = 1 : \sen \frac{1}{2}S$
 $SZ : ZT = 1 : \sen \frac{1}{2}S.$

(6) $St : tz = 1 : \tan \frac{1}{2}S$
 $ST : TZ = 1 : \tan \frac{1}{2}S.$

(7)
$$\left\{ \begin{array}{l} \sen \frac{1}{2}S = \sqrt{\frac{TA \cdot At}{AS \cdot SA'}} \\ \cos \frac{1}{2}S = \sqrt{\frac{TS \cdot St}{AS \cdot SA'}} \end{array} \right\} \Rightarrow \sen S = 2 \sen \frac{1}{2}S \cos \frac{1}{2}S$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} AS \cdot SA' \sin S = 2\sqrt{TA \cdot At \cdot TS \cdot St} \\ AS \cdot SA' \sin S = 2ASA' \\ ASA' = \sqrt{TA \cdot At \cdot TS \cdot St} \\ ASA' = \sqrt{\frac{1}{2}C \left(\frac{1}{2}C - SA\right) \cdot \left(\frac{1}{2}C - SA'\right) \cdot \left(\frac{1}{2}C - AA'\right)} \end{array} \right\}$$

$$(9) \quad ASA' = ST \cdot tz = ST \cdot St \cdot \tan \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}h \cdot AA' \Rightarrow h = \frac{2ST \cdot St \tan \frac{1}{2}S}{AA'}$$

Según la ecuación (9)

$$ASA' = ST \cdot tz = ST \cdot St \cdot \tan \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}h \cdot AA'$$

y según la ecuación (1)

$$ST = \frac{1}{2}C, St = \frac{1}{2}C - AA'$$

entonces sustituyendo

$$\frac{1}{2}C \cdot \left(\frac{1}{2}C - AA'\right) \cdot \tan \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}h \cdot AA'$$

Si $2s$ es la suma dada de los lados, $2b$ la base buscada y h la altura nos queda $C = 2s + 2b$ y entonces

$$\frac{1}{2}(2s + 2b) \cdot \left(\frac{1}{2}(2s + 2b) - 2b\right) \cdot \tan \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}h \cdot 2b$$

de donde

$$(s^2 - b^2) = bh \cot \frac{1}{2}S$$

y así

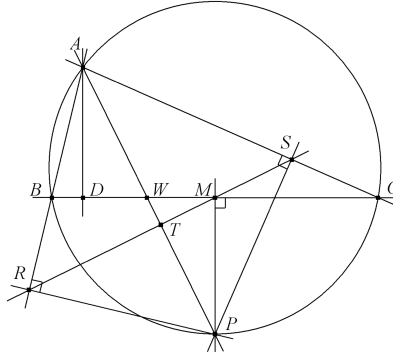
$$b = \sqrt{s^2 + \frac{1}{4}h^2 \cot^2 \frac{1}{2}S} - \frac{1}{2}h \cot \frac{1}{2}S.$$

Construcción: Basta construir b por medio de regla y compás.

De nuevo, hemos reducido el problema a hallar un triángulo dados la base, la altura y el ángulo opuesto a la base.

2.3 ANALISIS - NATHAN ALTSHILLER-COURT.

Construir un triángulo conocidos A , h_a , $b + c$.



Sea ABC el triángulo requerido, W , P las trazas de la bisectriz interior AW del ángulo A sobre BC y sobre el círculo circunscrito ABC , y R , S las proyecciones de P sobre AB , AC . Tenemos:

$$(1) \quad AR + AS = (AB + BR) + (AC - SC) = (AB + AC) + (BR - SC).$$

Ahora $PB = PC$ porque P es el punto medio del arco BPC y $PR = PS$; de ahí, y de los dos pares de triángulos rectángulos congruentes PAR y PAS , PRB y PSC , obtenemos $AR = AS$ y $BR = CS$, luego, de (1): $AR = AS = \frac{1}{2}(AB + AC) = s$.

Así en el cuadrilátero $ASPR$ conocemos el ángulo $SAR = A$, los lados AR , AS , y los ángulos ARP , ASP que son rectos; el cuadrilátero puede ser construido, y AP es la mediatriz de RS .

RS es la recta de Simson de P respecto a ABC ; así RS pasa por el pie M de la perpendicular PM de P a BC . Sea T la traza de RS en AWP . De los triángulos rectángulos semejantes PMT , ADW

$$(2) \quad PT : AD = PM : AW = PM : (AP - PW),$$

y en los triángulos rectángulos PMW , APS

$$(3) \quad PM^2 = PT \cdot PW, \quad PS^2 = PT \cdot PA;$$

así, de (2) y (3):

$$(4) \quad PM^2 + AD \cdot PM - PS^2 = 0.$$

Construcción: El segmento $AD = h_a$ es dado, y PS es conocido a partir del cuadrilátero $ASPR$ ya construido; por tanto PM puede ser construido.

El círculo (P, PM) encuentra a RS en el punto M . La perpendicular a PM en M encontrará a los lados AR, AS del cuadrilátero $ASPR$ en los vértices B, C del triángulo pedido ABC .

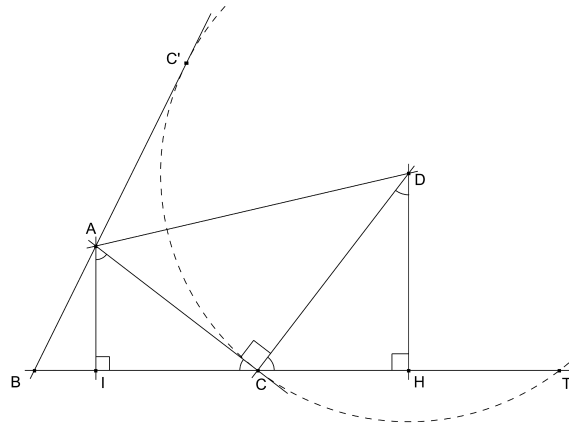
El problema no tiene solución si la altura h_a es mayor que el segmento $AT = s \sin \frac{1}{2}A$. Cuando h_a es igual a AT , el triángulo ABC es isósceles. Cuando AD es menor que AT , la construcción da dos soluciones, simétricas con respecto a AP .

2.4 ANALISIS - EMILE LEMOINE.

Construir un triángulo del que se conoce un ángulo CAB , la suma de los dos lados que comprenden al ángulo

$$AC + AB = b + c = m$$

y la altura $AI = h$ desde A hasta BC .



Supongamos el problema resuelto; sea ABC el triángulo buscado; y sea C' un punto tomado sobre BA más allá de A ; sea D la intersección de la bisectriz del ángulo $C'AC$ con la perpendicular a AC por C ; sea H el pie de la perpendicular desde D hasta BC .

Los dos triángulos AIC , CHD son semejantes, y nos dan:

$$\frac{CH}{AI} = \frac{CD}{CA},$$

de donde,

$$CH = \frac{CD}{CA} \cdot AI;$$

siendo la razón $\frac{CD}{CA}$ conocida, ya que en el triángulo ACD , rectángulo en C , se conoce

también el ángulo $DAC = \frac{1}{2}(180^\circ - A)$, en consecuencia CH es conocido. Establecido lo anterior, trazamos el círculo de centro D y radio DC , tangente a BA en C' y que corta a BC en un segundo punto T ; tenemos

$$BC'^2 = BC \cdot BT,$$

o

$$BC'^2 = BC \cdot (BC + CT);$$

pero $BC' = BA + AC' = AB + AC = m,$

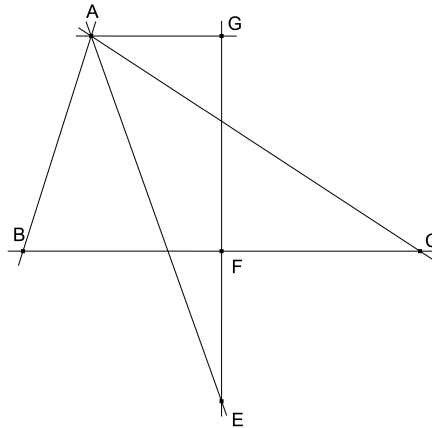
entonces $m^2 = BC \cdot (BC + CT);$

pero $CT = 2CH$ es conocido.

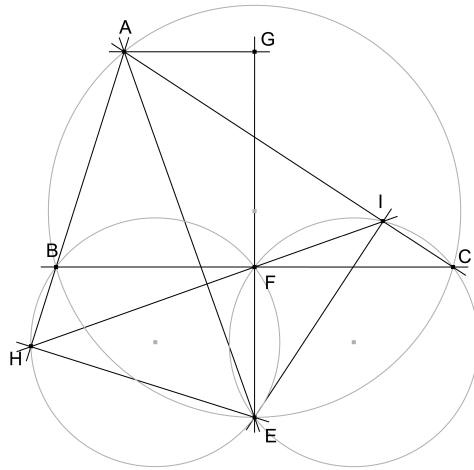
Se conocen pues, el producto m^2 de BC por BT y su diferencia CT , se pueden construir BC y BT y el problema se acaba sin dificultad.

De nuevo, hemos reducido el problema a hallar un triángulo dada la base, la altura y el ángulo opuesto a la base.

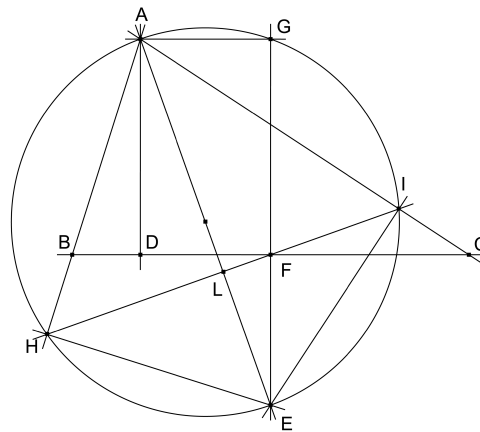
Construir un triángulo si se conoce un ángulo, la altura trazada desde el vértice del ángulo al lado opuesto, y la suma de los otros dos lados.



Como los triángulos EHB, EIC son iguales, tenemos $AH = AI = \frac{1}{2}(b + c)$, lo que determina al cuadrilátero AHEI.



Unamos F a H e I . De los cuadriláteros inscriptibles $EHB F$, $EBAC$, $EFIC$ se concluye que el ángulo $EFH = EBH = ECI = 180^\circ - EFI$; y de ahí que la recta HI pasa por F .



Como el punto G está sobre la circunferencia $AHEI$, se trata entonces de trazar una cuerda EG de tal modo que FG , su parte por encima de HI , sea igual a la altura dada $AD = h$. De este modo, hemos llevado a la construcción a un problema conocido.

Discusión. Debe ser $FG \leq AL$, L designa al punto de intersección de AE y HI ; de donde

$$h \leq \frac{1}{2} (b + c) \cos \frac{1}{2}A$$

¿Cómo podemos encontrar esta restricción mediante la trigonometría?

Se tiene

$$a^2 = (b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{1}{2}A = (b + c)^2 - 2ah \cot \frac{1}{2}A;$$

$$a = -h \cot \frac{1}{2} A + \sqrt{(b+c)^2 + h^2 \cot^2 \frac{1}{2} A}.$$

Entonces, $a \cos \frac{1}{2} (B - C) = (b + c) \sin \frac{1}{2} A$

así $a \geq (b + c) \sin \frac{1}{2} A$

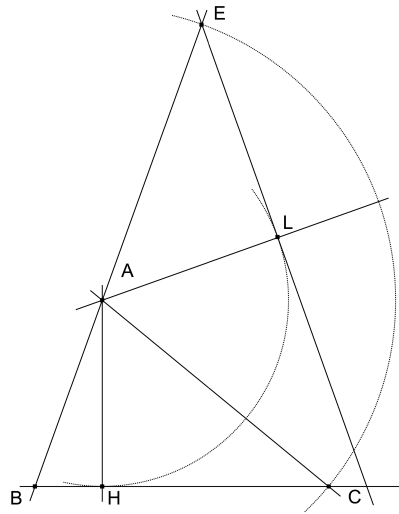
$$[(b + c) \sin \frac{1}{2} A + h \cot \frac{1}{2} A]^2 \leq (b + c)^2 + h^2 \cot^2 \frac{1}{2} A;$$

$$2h (b + c) \cos \frac{1}{2} A \leq (b + c)^2 \cos^2 \frac{1}{2} A;$$

$$h \leq \frac{1}{2} (b + c) \cos \frac{1}{2} A$$

Observación. Al problema anterior puede vincularse el caso en el que se conoce la diferencia de lados $b - c$ en lugar de la suma $b + c$, o la diferencia de ángulos $B - C$ en lugar del ángulo A .

Construir un triángulo si se conoce un ángulo, la altura trazada desde el vértice del ángulo al lado opuesto, y la suma de los otros dos lados.



UN ÁNGULO CONSTANTE $\angle CAE$ GIRA EN TORNO DE SU VÉRTICE A , Y UNO DE SUS LADOS ENCUENTRA A UNA RECTA FIJA BC EN EL PUNTO C ; SE TOMA SOBRE EL OTRO LADO UNA LONGITUD AE IGUAL A AC : SE PIDE EL LUGAR DEL PUNTO E .

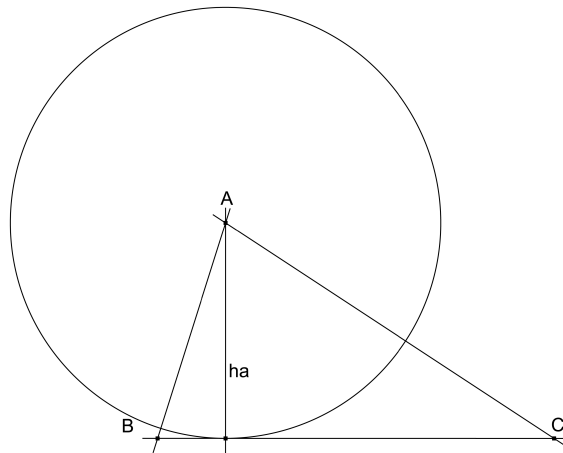
UN TRIÁNGULO VARIABLE ABC , QUE PERMANECE SEMEJANTE A SÍ MISMO, GIRA ALREDEDOR DE UNO DE SUS VÉRTICES A , MIENTRAS QUE OTRO VÉRTICE B RECORRE UNA RECTA FIJA XY ; SE PIDE EL LUGAR DEL TERCER VÉRTICE C .

DADOS UN PUNTO FIJO A Y UNA RECTA FIJA XY ; POR EL PUNTO A , SE TRAZAN DOS RECTAS AB Y AC QUE FORMAN UN ÁNGULO DADO; LA PRIMERA ENCUENTRA A XY EN B , SE TOMA SOBRE LA SEGUNDA UN PUNTO C TAL, QUE LA RAZÓN ENTRE AC Y AB SEA IGUAL A LA RAZÓN DE DOS LÍNEAS DADAS M Y N : SE PIDE EL LUGAR DEL PUNTO C .

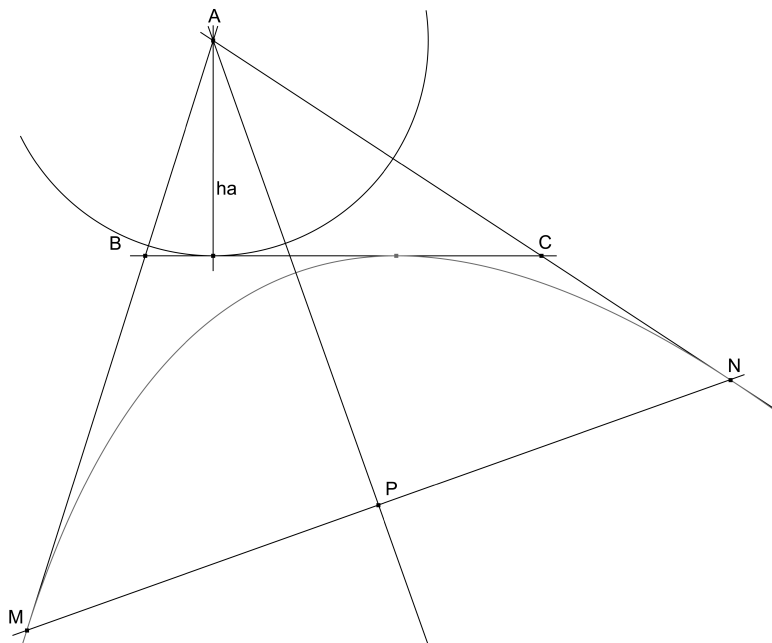
30

2.7 ANALISIS - EMILE WEBER.

Construir un triángulo si se conoce un ángulo, la altura trazada desde el vértice del ángulo al lado opuesto, y la suma de los otros dos lados.

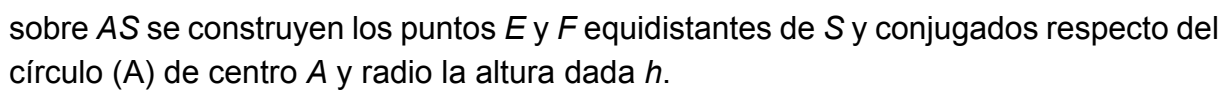
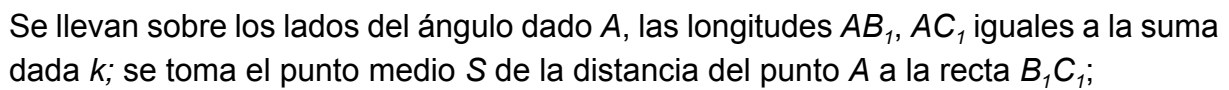


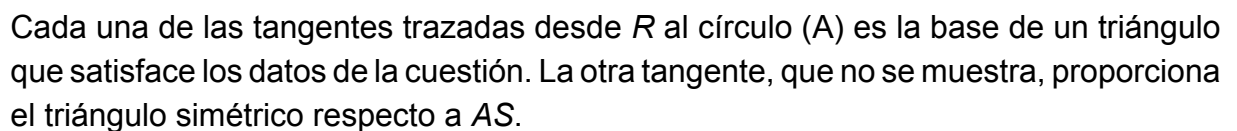
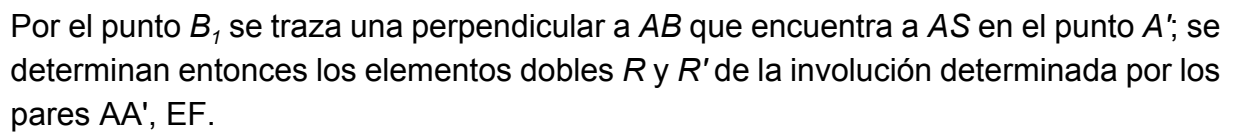
La base del triángulo buscado debe ser tangente al círculo de centro A y radio h_a .



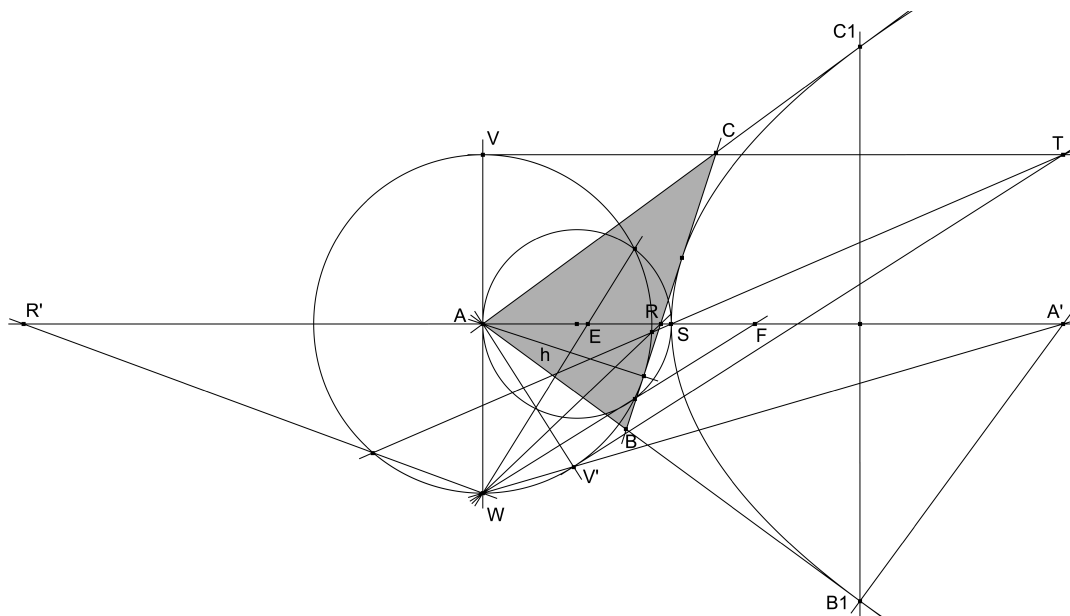
Por otra parte, es fácil encontrar la envolvente de la base de un triángulo, cuyo ángulo en el vértice es fijo y del que la suma de lados que lo comprenden es una constante, $b + c$. Esta envolvente es una parábola tangente a los lados del ángulo A en los puntos M y N , tales que $AM = AN = b + c$. El eje de esta parábola es la bisectriz AP del ángulo A y el vértice está situado en el punto medio de la distancia AP (P punto medio de MN).

Construir un triángulo si se conoce un ángulo, la altura trazada desde el vértice del ángulo al lado opuesto, y la suma de los otros dos lados.





Nota. La tangente trazada desde el punto R' proporciona la base al triángulo de ángulo $180^\circ - A$ en el vértice y k como diferencia de los lados que lo comprenden (k es el segmento dado como la suma de lados del enunciado).



Demostración. En efecto, la base desconocida BC del triángulo es tangente al círculo (A) y a la parábola (P) tangente a las dos rectas AB , AC , respectivamente en los puntos B_1 y C_1 ; el punto S es el vértice de esta parábola y la recta AS es el eje. Los puntos E y F y el punto G en el infinito de B_1C_1 , son los vértices del triángulo conjugado respecto del círculo (A) y de la parábola (P). Se sabe que una recta l y la recta L_1L_2 que une a los polos L_1 y L_2 de l respecto de dos cónicas (A) y (P) determinan sobre un lado EF del triángulo EFG conjugado respecto de (A) y (P) dos puntos conjugados en una involución cuyos puntos dobles pertenecen a las tangentes comunes a (A) y (P); el par EF forma parte de esta involución, Si l es la recta AB_1 , el punto L_1 está en el infinito de una perpendicular a esta recta y L_2 es idéntico a B_1 . Así AA' es un par de la involución citada, lo que establece la construcción anterior.

Observación. Las construcciones indicadas se ejecutan fácilmente si se usan las proyecciones sobre el círculo (A) hechas desde un punto de este círculo. Para este punto, se elegirá una de los extremos V , W del diámetro normal a AS , por ejemplo W . Las proyecciones de los puntos E y F sobre el círculo son los elementos dobles de una involución cuyo polo es el punto S . La recta WA' corta al círculo (A) en V' , V y V' proyecciones de A y A' son los elementos dobles de una involución cuyo polo T también es el polo de la cuerda VV' . La recta ST corta a (A) en los puntos conjugados comunes a estas involuciones; estos puntos son las proyecciones de R y R' .

Se observará que la construcción precedente es independiente de la realidad de los puntos E y F .

Realidad de las soluciones.

1º. $h < AS$. El triángulo EFG es real y las cuatro tangentes comunes al círculo (A) y a la parábola son reales; el problema tiene cuatro soluciones (pero dos de ellas corresponden al ángulo suplementario y a la diferencia de lados).

2º $h = AS$. El círculo (A) y la parábola (P) son tangentes en S, la tangente en este punto da una solución. El punto S es idéntico a R, y el punto R' es el conjugado de S respecto de AA', como AS es menor que A'S el punto R' está en la prolongación SA del eje de la parábola y las tangentes trazadas desde este punto son reales, lo que da dos soluciones reales.

3º $h > AS$. El triángulo EFG es imaginario; el círculo (A) y la parábola (P) tienen dos tangentes comunes reales y dos imaginarias. El problema tiene entonces dos soluciones reales y dos imaginarias.

Otro problema. Las mismas consideraciones dan la solución del problema:

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO, SI SE CONOCE UN ÁNGULO, LA ALTURA DESDE EL VÉRTICE DEL ÁNGULO AL LADO OPUESTO Y EL PRODUCTO k^2 DE LOS OTROS DOS LADOS.

Se llevan sobre los lados del ángulo las longitudes $AB_1 = \frac{1}{2}k$, $AC_1 = 2k$, la recta B_1C_1 corta a la bisectriz del ángulo en un punto D. Se une el polo de B_1C_1 respecto del círculo (A) con el punto medio de B_1C_1 , la recta obtenida corta a AD en el punto D'. Se construyen los puntos R y R' equidistantes de A y conjugados respecto de DD'. Las tangentes trazadas desde estos puntos, al círculo (A) dan las soluciones del problema propuesto.

Problema general. Se tratará igualmente el problema más general:

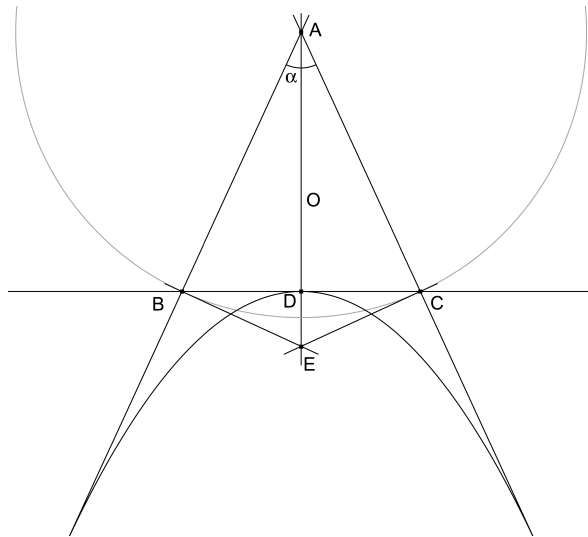
CONSTRUIR UN TRIÁNGULO, SI SE CONOCE UN ÁNGULO, LA ALTURA TRAZADA DESDE EL VÉRTICE DEL ÁNGULO AL LADO OPUESTO Y LOS OTROS DOS LADOS b Y c LIGADOS POR LA RELACIÓN:

$$bc + \alpha(b + c) + \beta^2 = 0$$

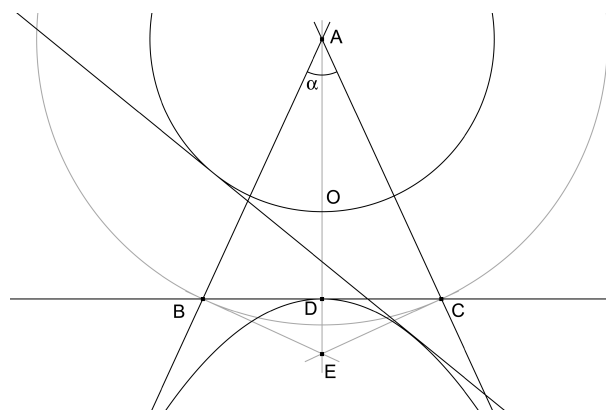
siendo α y β dos longitudes dadas.

2.9 ANALISIS - ELIZABETH B. DAVIS.

Construir un triángulo si se tiene la suma de dos lados, el ángulo comprendido por esos lados, y la altura desde el ángulo dado sobre el tercer lado.



Sea la suma de los dos lados $2k$, el ángulo comprendido α , y la altura sobre el tercer lado R . Se construye $\triangle BAC$, haciendo $\angle A = \alpha$ y $AB = AC = k$. Dibújese AO , la bisectriz de $\angle A$, y erigir perpendiculares a AB y AC en B y C , respectivamente, que encuentran a AO en E . Sea D el punto medio de BC sobre AO . Entonces E es el foco de una parábola de la que DO es el eje, y BC la tangente en el vértice D . Cada tangente a esta parábola corta en AB y AC segmentos cuya suma es $AB + AC = 2k$. Por lo tanto, el tercer lado del Δ requerido es tangente a la parábola.

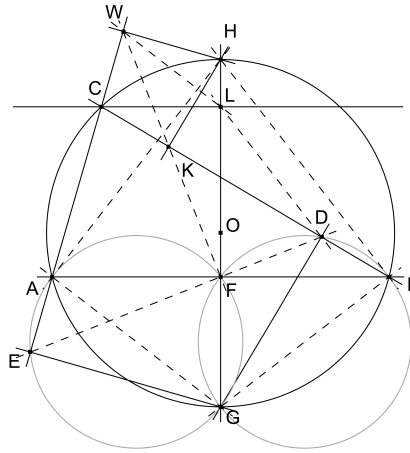


Ya que la perpendicular sobre él desde A es igual a R , es también tangente al círculo cuyo centro es A y radio R . Por consiguiente, el problema es:

CONSTRUIR UNA TANGENTE COMÚN A ESTA PARÁBOLA Y AL CÍRCULO.

2.10 ANALISIS - H. LIEBER Y F. VON LÜHMANN.

$a + b$, h_c , γ .



Círculo inscrito al triángulo ABC , G el punto medio del arco AB , F el de AB , GF prolongada encuentra al círculo en H y en L a una paralela por C a AB ; GE y HW perpendiculares a AC , GD y HK perpendiculares a BC . Entonces

$$CD = CE = AW = BK = \frac{1}{2}(a + b)$$

y

$$CW = CK = BD = AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

Además

$$\angle AFE = \angle AGE \text{ (AFGE inscrito)} = \angle BGD = \angle BFD,$$

así EFD es una recta; y

$$\angle HFK = \angle HBK = \angle HAW = \angle HFW,$$

por tanto FKW es una recta.

$\triangle GFD \simeq \triangle GDL$ ($\angle GDF = \angle GLD = \frac{1}{2}\gamma$), en consecuencia

$$GF \cdot GL = GD^2;$$

y $\triangle HWL \simeq \triangle HFW$, así

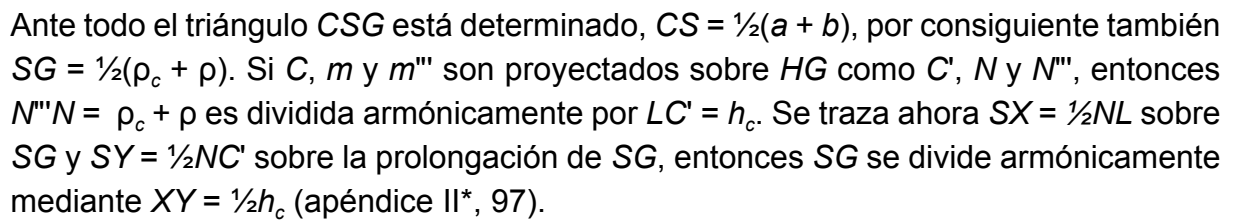
$$HF \cdot HL = HW^2;$$

por consiguiente

$$GL - GF = HF - HL = h_c,$$

entonces se hallan GL y GF , así como HF y HL conforme a §. 139, b, 7. y 8.

En el párrafo §. 139 “Ejercicios, en los que se construyen las raíces de una ecuación de segundo grado”, el apartado b presenta los dos enunciados equivalentes:

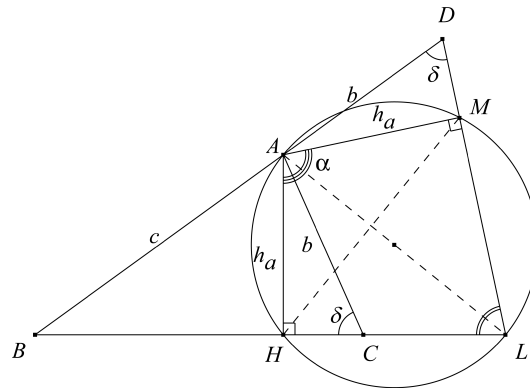


SE DAN P, P' . SE DEBE CORTAR PP' ARMÓNICAMENTE MEDIANTE UN SEGMENTO
a. Análisis. Como en 93.

SE DAN P, P', P'' EN LÍNEA RECTA. DIVIDIR PP' ARMÓNICAMENTE MEDIANTE UN SEGMENTO XX' , CUYO PUNTO MEDIO ES P'' .

2.11 ANALISIS - JUAN SAPIÑA BORJA.

Construir un triángulo conociendo $A, h_a, b + c$.



Si tomamos AD y en D trazamos $\angle \delta = \angle C$, entonces $\angle DLB = \angle A$. Al trazar AM perpendicular a DL , los triángulos rectángulos ADM y AHC son congruentes; luego $AM = h_a$, lo que nos dice que A equidista de DL y BC , por lo que estará en la bisectriz del $\angle DLB$.

Luego el cuadrilátero $AHLM$ es inscriptible y $\angle HAM = \angle \alpha = 180^\circ - \angle DLB$ y lo podemos construir. Basta construir el triángulo AMH , circunscribirle un círculo y trazar AL perpendicular a HM (por ser HAM isósceles). Conocemos así la magnitud de AL que es la bisectriz del $\angle DLB$.

Construcción: Queda reducido a

CONSTRUIR EL TRIÁNGULO BDL , DEL QUE CONOCEMOS UN LADO $BD = b + c$, SU ÁNGULO OPUESTO $\angle DLB = \angle A$ Y LA BISECTRIZ CORRESPONDIENTE $AL = W_a$.

Otra construcción: Tenemos el ángulo $\angle L = \angle A$, tenemos la bisectriz en posición y magnitud porque tenemos el punto A sobre dicha bisectriz, también podemos colocar $b + c$ en el triángulo BDL por medio del problema de Pappus.

3. PROBLEMAS AUXILIARES

Veremos ahora los problemas a que reducen los distintos autores la resolución del enunciado original así como los enunciados auxiliares que hay que resolver para llegar a la solución final.

Philippe de la Hire reduce el problema a la resolución de la ecuación de segundo grado $z^2 + \frac{2bc}{d}z - a^2 = 0$ con la que halla la base z del triángulo buscado y que después construye requerido conocida la base, la altura, y el ángulo opuesto a la base.

Simon A. J. Lhuillier reduce el problema a la construcción de la expresión $b = \sqrt{s^2 + \frac{1}{4}h^2 \cot^2 \frac{1}{2}S} - \frac{1}{2}h \cot \frac{1}{2}S$ donde b es la semibase del triángulo buscado y que después construye conocida la base, la altura y el ángulo opuesto a la altura.

Nathan Altshiller-Court necesita como paso intermedio la determinación de PM a partir de la ecuación $PM^2 + AD \cdot PM - PS^2 = 0$; donde PM es el segmento de la mediatriz de la base del triángulo buscado entre esa base y el círculo circunscrito.

Emile Lemoine reduce al problema a la determinación de dos segmentos BC y BT de los que se conoce su producto m^2 y su diferencia CT , Como BC es la base del triángulo pedido; de nuevo, hemos reducido el problema a hallar un triángulo dada la base, la altura y el ángulo opuesto a la base.

E. Emmerich reduce el problema propuesto al siguiente: “Por el punto medio E del arco BEC de un círculo trazar una secante que encuentre a la cuerda BC en U y al círculo otra vez en A , de tal modo que AU tenga una longitud dada, t . En este caso t es la altura dada”. O resolver la ecuación de segundo grado $EF \cdot EM = EU \cdot (EU + t)$ donde EF , EM , t son magnitudes conocidas.

Emile Weber reduce el problema a trazar la tangente común a una parábola y a un círculo que tiene el centro sobre el eje de dicha parábola. Evidentemente, traza las tangentes sin necesidad de la parábola.

CL, Servais al igual que Weber reduce el problema al trazado de la misma tangente; y esta construcción la reduce de nuevo a trazar las tangentes a un círculo desde los puntos dobles de una involución. Además de la determinación de los puntos dobles de una involución, previamente se precisa la siguiente construcción auxiliar: “Sobre AS se construyen los puntos E y F , equidistantes de S , conjugados armónicos respecto de un círculo de centro A y radio dado”. De nuevo se prescinde de la parábola.

H. Lez, que sigue el texto de **Adolphe Desboves**. reduce el problema a hallar un lugar geométrico; y luego sólo le queda resolver el problema de Pappus ya mencionado.

Elizabeth Davis como Weber y Servais reduce el problema original al trazado de la tangente común a círculo y parábola, trazado que resuelve de forma distinta a los anteriores. Pero como siempre prescindiendo de la parábola.

H. Lieber y F. von Lühmann presentan tres procedimientos distintos. El primero se reduce a la resolución del siguiente ejercicio: “Hallar dos líneas, cuya diferencia a y cuyo producto bc son conocidos, en el caso en que $b = c$ ”. El segundo se reduce a la resolución de la ecuación $(a + b)^2 = c \cdot (c + AL)$ donde a , b , AL son magnitudes conocidas. El tercer procedimiento se basa en la resolución del siguiente enunciado que dice así: “Se dan P, P' . Se debe cortar PP' armónicamente mediante un segmento a ”; y basa su resolución en el análisis de otro enunciado previo: “Se dan P, P', P'' en línea recta. Dividir PP' armónicamente mediante un segmento XX' , cuyo punto medio es P''' ”. Este último coincide a su vez, aunque con otra redacción, con el enunciado auxiliar señalado en la solución de CL. Servais.

Juan Sapiña Borja convierte el problema original en el siguiente: “Construir el triángulo BDL , del que conocemos un lado $BD = b + c$, su ángulo opuesto $\angle DLB = \angle A$ y la bisectriz correspondiente $AL = W_a$. Recordemos que la construcción auxiliar llevada a cabo por Juan Sapiña también conduce a la resolución del enunciado original por medio del problema de Pappus.

Vamos a ver las construcciones auxiliares que hemos puesto de manifiesto; pero dejaremos para el final las construcciones de puntos armónicos y los procedimientos de trazado de tangentes comunes a una parábola y a un círculo con el centro sobre el eje de dicha parábola.

3.1 PRIMER PROBLEMA AUXILIAR

Resolución de la ecuación de segundo grado $q^2 = y \cdot (y + 2p)$ donde y es la incógnita, siendo $p, q > 0$ magnitudes conocidas.

Fijémonos que de la Hire, Lhuilier, Altshiller-Court, Emmerich, y Lieber y von Lühmann en su segundo procedimiento llegan al mismo tipo de ecuación.

Philippe de la Hire,

$$a^2 = z \cdot \left(z + 2 \frac{bc}{d} \right).$$

Simon A. J. Lhuilier,

$$s^2 = b \cdot \left(b + 2 \frac{h}{2} \cot \frac{S}{2} \right).$$

Nathan Altshiller-Court,

$$PS^2 = PM \cdot \left(PM + 2 \frac{AD}{2} \right).$$

E. Emmerich,

$$EF \cdot EM = EU \cdot (EU + t) .$$

H. Lieber y F. von Lühman en su segundo procedimiento,

$$(a + b)^2 = c \cdot \left(c + 2 \frac{AL}{2} \right).$$

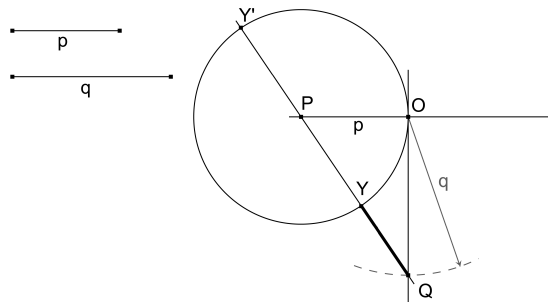
Todas estas ecuaciones son de la forma $q^2 = y \cdot (y + 2p)$ con $q, p > 0$.

Podemos o bien abordar la construcción de y directamente de esta igualdad mediante un círculo de diámetro p con tangente desde un punto exterior de longitud q ; o bien transformar la ecuación dada en otra expresión equivalente que permite reconocer el teorema de Pitágoras y hallar y mediante un triángulo rectángulo sencillo de construir.

$$\begin{aligned} y \cdot (y + 2p) &= q^2 \\ y^2 + 2yp &= q^2 \\ y^2 + 2yp + p^2 &= q^2 + p^2 \\ (y + p)^2 &= q^2 + p^2 \end{aligned}$$

en la última ecuación se reconoce $y + p$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos p y q que son conocidos.

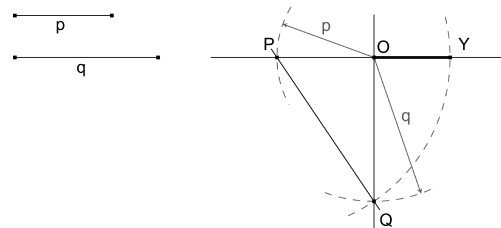
Primera construcción



Sea un segmento $OQ = q$. Por el extremo O trazamos un círculo tangente de radio p cuyo centro denominamos P . Entonces la recta PQ corta la círculo anterior en Y e Y' . QY es la magnitud buscada de y .

Sabemos que $OQ^2 = QY \cdot QY' = QY \cdot (QY + YY') \Rightarrow q^2 = y \cdot (y + 2p)$.

Segunda construcción



Por un punto O cualquiera, se trazan dos rectas perpendiculares. Sobre la primera se lleva un punto P tal que $OP = p$, sobre la segunda se lleva Q tal que $OQ = q$. Se une P con Q ; con centro P y radio PQ se traza un arco que corta a la prolongación de PO en Y . OY es la magnitud buscada de y .

Como $PQ = PY = PO + OY$ y además en el triángulo rectángulo POQ tenemos por el teorema de Pitágoras $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$ de donde combinando las dos ecuaciones tenemos

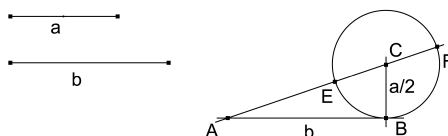
$$\begin{aligned}(OY + PO)^2 &= OP^2 + OQ^2 \\ (y + p)^2 &= p^2 + q^2\end{aligned}$$

3.2 SEGUNDO PROBLEMA AUXILIAR

Hallar dos segmentos, cuya diferencia a y cuyo producto bc son conocidos, en el caso en que $b = c$.

Observemos que éste es el enunciado auxiliar que tiene en común la solución de Emile Lemoine con el primer procedimiento de H. Lieber y F. Von Lühmann.

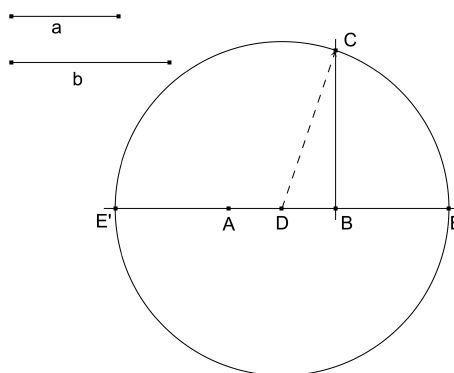
Primera construcción



Se traza $AB = b$, se traza en B la perpendicular $BC = \frac{1}{2}a$, se traza con centro C y radio BC un círculo, que encuentra a AC y a su prolongación en E y F , entonces AE y AF satisfacen el ejercicio.

Sabemos que $AE \cdot AF = AB^2 = b^2$. Además el diámetro EF del círculo trazado es dos veces el radio $2 \cdot \frac{1}{2}a = a = EF = AF - AE$.

Segunda construcción



Se traza $AB = a$, se traza en B la perpendicular $BC = b$, con centro en D , punto medio de AB , y radio DC se traza un círculo, que encuentra a la prolongación de AB en E (la otra intersección es E'), entonces AE y BE satisfacen el ejercicio.

Como D es el punto medio de AB , entonces $E'B = AE$.

Sabemos que $b^2 = BC^2 = E'B \cdot BE = AE \cdot BE$.

Además $a = AB = AE + EB = AE - BE$.

3.3 TERCER PROBLEMA AUXILIAR

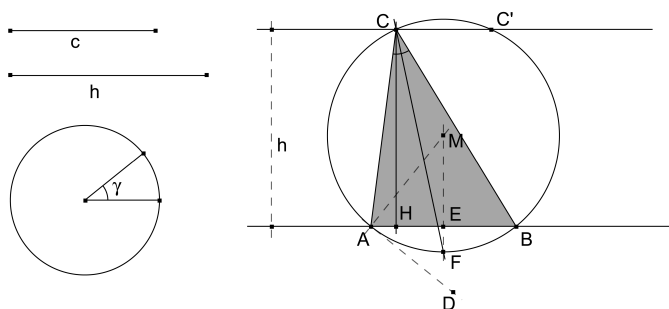
Construir un triángulo dada la base $AB = c$, el ángulo $C = \gamma$ opuesto a dicha base y la altura $CH = h$ desde el vértice de ese ángulo.

Este es el enunciado de la construcción que requieren las soluciones de Philippe de la Hire, Simon A. J. Lhuillier, Emile Lemoine y la segunda de H. Lieber y F. Von Lühmann.

Un primer lugar geométrico para el vértice C . Si desde C se ve la base c según un ángulo dado γ , C está sobre el arco capaz del ángulo γ con el segmento $AB = c$.

Un segundo lugar geométrico para el vértice C . Si C está en el extremo de la altura a la base $CH = h$, C está en una paralela a la base AB a distancia $CH = h$ de esa base.

C pertenece simultáneamente a los dos lugares, por lo tanto son posibles soluciones, para C , las intersecciones de los dos lugares geométricos.



Sea por un punto A una recta cualquiera a la que trazamos una paralela a distancia h .

Se lleva sobre $AB = c$, en A , $\angle BAD = \gamma$ (D por la parte inferior de AB); se traza por A una perpendicular a AD , además se traza por el punto medio E de AB también una perpendicular, ambas se encuentran en M , se traza, con radio MA , el círculo de centro M , el lugar geométrico del vértice del triángulo es la parte del círculo que yace por la parte superior de AB , al otro lado del $\angle BAD$: si tomamos por ejemplo C , entonces $\angle ACB = \angle BAD$ por ser el ángulo del segmento con la tangente en A .

Se observa que si desde M se traza la perpendicular a AB se biseca tanto el lado AB en E como al arco AB en F , así $\angle ACF = \angle BCF$ ó CF es la bisectriz del ángulo ACB .

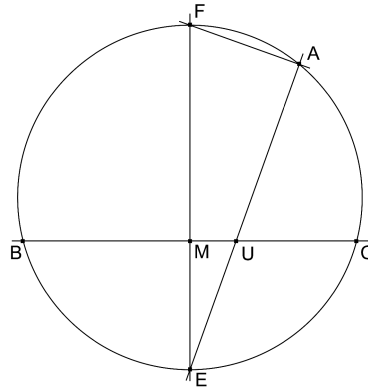
La intersección del círculo de centro M y la paralela inicial proporcionan el triángulo ABC que es solución. C' proporciona una segunda solución.

Observación. Si $\gamma > 90^\circ$, el centro M cae bajo la línea AB .

3.4 CUARTO PROBLEMA AUXILIAR

Por el punto medio E del arco BEC de un círculo trazar una secante que encuentre a la cuerda BC en U y al círculo otra vez en A , de tal manera que AU tenga una longitud dada, t .

Este enunciado auxiliar permite completar la solución de E. Emmerich y como se ve está plenamente vinculado con el quinto problema auxiliar que se propone en 3.5.

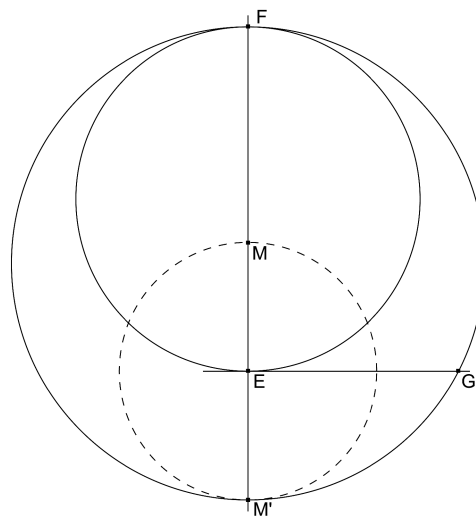


Sea el diámetro EMF que pasa por E y encuentra a la cuerda BC en M .

Como los triángulos rectángulos EUM , EFA poseen un ángulo común, son semejantes y por ello se cumple que

$$\frac{EF}{EU} = \frac{EA}{EM} \Rightarrow EF \cdot EM = EA \cdot EU.$$

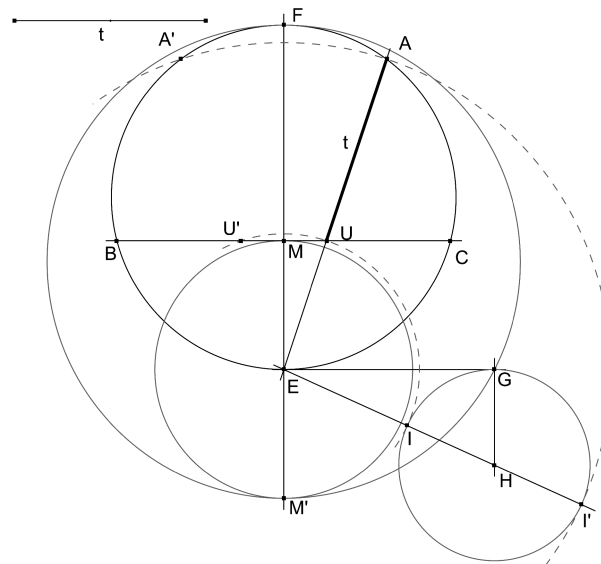
Si ahora ponemos $EA = EU + t$, la proporción anterior puede ser expresada por la ecuación $EF \cdot EM = EU \cdot (EU + t)$ y el segmento EU puede ser construido.



Aprovechamos el problema auxiliar 3.1 sustituyendo $EF \cdot EM$ por su media geométrica.

Para ello, trazamos sobre la prolongación de FE un punto M' tal que $ME = EM'$; trazamos el círculo de diámetro FM' y una perpendicular por E a EF que corta a ese círculo en G . EG es la media buscada.

Sabemos que $EG^2 = EF \cdot EM' = EF \cdot EM$. Nos queda pues $EG^2 = EU \cdot (EU + t)$ que sabemos resolver. La longitud conocida del segmento EU determina el punto U ; y de él la secante requerida EUA .



Dado el círculo y su cuerda BC trazamos la mediatriz de BC que corta a BC en M y al círculo en E y F .

Trazamos sobre la prolongación de FE el punto M' tal que $ME = EM'$.

Por E una perpendicular a EF que corta al círculo de diámetro FM' en G .

Dibujamos por G un círculo tangente a EG de diámetro t y centro H .

La recta EH corta a este círculo en I y su prolongación lo corta en I' .

Un arco de centro E y radio EI corta a BC en U ; pero como $I'I = t$, un arco de centro E y radio EI' corta al círculo original en A . Por lo tanto podemos, o bien hallar U y luego A con la intersección de la prolongación de EU con el círculo original, o bien hallar A y luego hallar U con la intersección de EA con la cuerda BC .

Las segundas intersecciones U' y A' proporcionan una segunda solución.

3.5 QUINTO PROBLEMA AUXILIAR

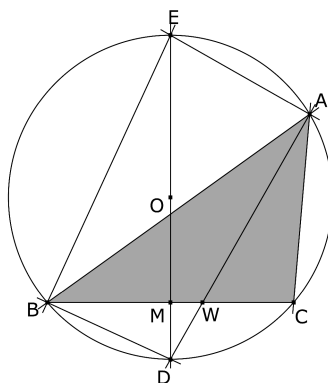
Construir un triángulo conociendo un lado a , su ángulo opuesto A , y la magnitud w_a de la bisectriz desde el vértice de ese ángulo hasta el lado opuesto a .

La solución de este enunciado permite resolver el problema de Pappus y también directamente la solución del problema original que presenta Juan Sapiña Borja.

Primera solución

El hecho de conocer la base $BC = a$ y el ángulo opuesto A nos permite conocer el círculo circunscrito del triángulo solución. En efecto, tal como hemos visto en 3.3, ese círculo es el lugar geométrico de los puntos desde los que se ve el segmento BC bajo un ángulo A , y este lugar no es más que el arco capaz del ángulo A y segmento BC . En este punto nos sería sencillo tomar el punto medio E del arco inferior BC y transformar el enunciado actual en el enunciado del cuarto problema auxiliar de 3.4, donde sustituiríamos t por el valor dado aquí de la bisectriz w_a .

Segunda solución

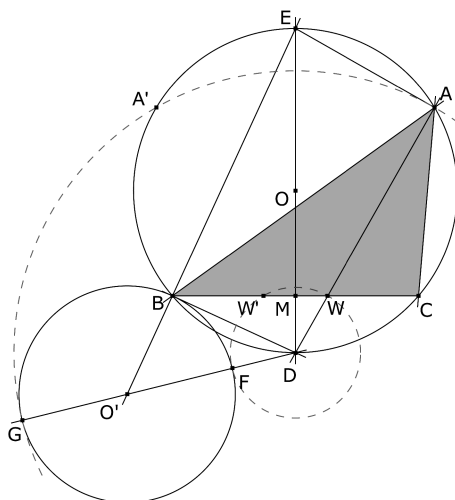


Trazamos un triángulo ABC , su círculo circunscrito con centro en O y la bisectriz del ángulo A que encuentra al círculo circunscrito en D , punto medio del arco BC abarcado por el lado opuesto a A , y al lado BC en el punto W , y $AW = w_a$ es uno de los datos del problema. DE es el diámetro del círculo circunscrito perpendicular a BC .

Los triángulos rectángulos EAD y WMD son semejantes por ser rectángulos con un ángulo común, $\angle ADE = \angle MDW$ por lo que $\frac{DE}{DW} = \frac{DA}{DM}$ de donde $DW \cdot DA = DE \cdot DM$ así que $DW \cdot (DW + WA) = DE \cdot DM$; donde $DW = w_a$ y $DE \cdot DM$ se conocen.

Los dos triángulos rectángulos BMD y EBD son semejantes, ya que tienen un ángulo común D . Podemos escribir $\frac{DM}{DB} = \frac{DB}{DE}$ de donde $DE \cdot DM = DB^2$.

De lo anterior, $DW \cdot (DW + WA) = DB^2$ es la potencia de un punto D respecto un círculo, de diámetro WA , donde B es el punto de contacto con la tangente DB .



Trazamos el círculo de diámetro $WA = w_a$ con centro O' tal que $O'B = \frac{1}{2} WA$ y tangente en B a la recta BD . El diámetro sobre DO' corta al círculo en F y G de modo que, $DF \cdot DG = DB^2$; pero $DG = DF + FG = DF + WA$ lo que supone $DF \cdot (DF + WA) = DB^2$; así que, comparando con la penúltima igualdad, $DW \cdot (DW + WA) = DB^2 = DF(DF + WA)$ por lo que $DW = DF$, con lo que podemos establecer la siguiente construcción

Trazamos los puntos B y C tal que $BC = a$.

Construimos el arco capaz del ángulo A sobre el segmento BC .

Círculo de diámetro w_a tangente en B a la recta BD y D es el punto medio del arco BC .

Obtenemos el punto F como intersección de DO' y el círculo anterior. La prolongación de DO' encuentra al mismo círculo en G .

Con centro en D y radio DF , trazamos un arco que corta a BC en W (y en W').

Como $FG = w_a$, el arco de centro D y radio DF corta al círculo circunscrito en A (y en A').

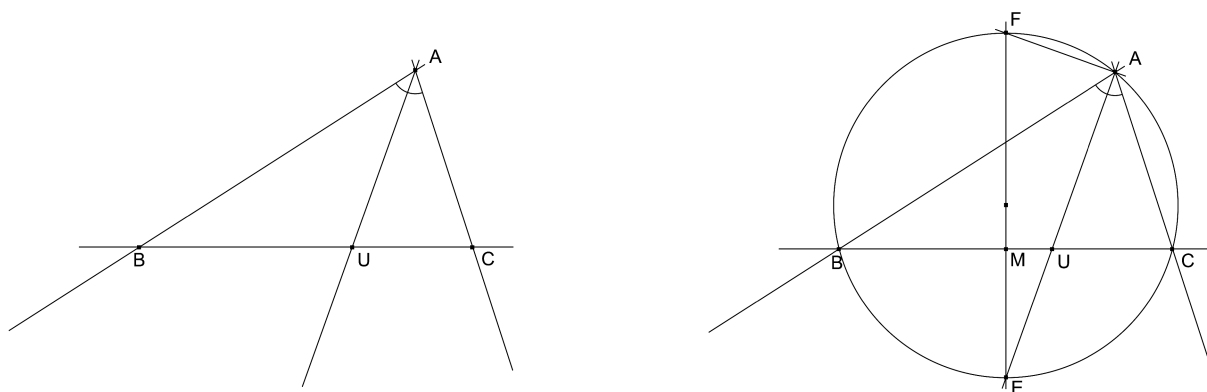
Al igual que en 3.4, se nos presentan dos opciones para concluir la construcción, o bien trazamos primero W y de ahí hallamos A , o bien trazamos primero A y de ahí hallamos W . Como en este caso lo que se busca es el triángulo ABC basta con trazar directamente A .

A' nos proporciona una segunda solución.

3.6 SEXTO PROBLEMA AUXILIAR - EL PROBLEMA DE PAPPUS

Por un punto dado de la bisectriz de un ángulo dado, trazar una secante en la que dicho ángulo intercepte un segmento de longitud dada.

Este enunciado concluye la solución de Adolphe Desvobes al problema original. También puede ser un segundo método de conclusión de la solución de Juan Sapiña.

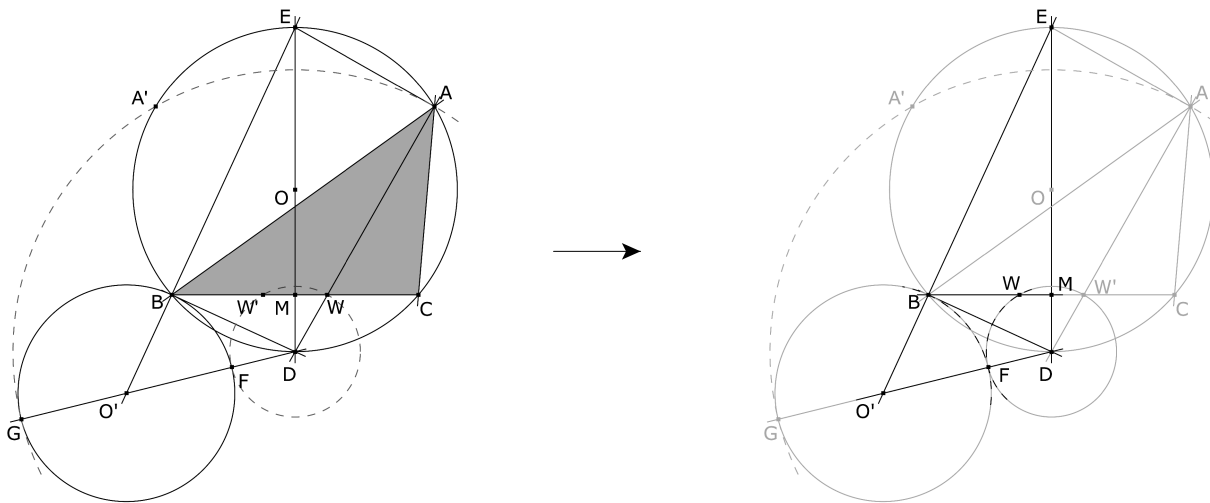


Supongamos el problema resuelto; se U el punto sobre la bisectriz; sean B y C los puntos en que la secante requerida $BUC = a$ intercepta a los lados del ángulo dado BAC . Si consideramos el triángulo ABC , AU es la magnitud de la bisectriz del ángulo A . Vemos pues que el problema de Pappus se transforma en la determinación de un triángulo en el que se conoce la base $BC = a$, el ángulo A opuesto a la base y la bisectriz AU ; es pues el enunciado del quinto problema auxiliar 3.5; pero con una salvedad el ángulo A junto con su bisectriz están dados en magnitud y posición, es por ello que desarrollaremos la solución en otra figura auxiliar. Tenemos entonces la construcción del párrafo siguiente.

En una recta cualquiera colocamos $B'C'$ igual a la longitud dada a ; y con $B'C'$ como cuerda, construimos el arco capaz del ángulo dado A . Por el punto medio E' del otro arco de este círculo trazamos una secante $E'U'A'$ que encuentra a $B'C'$ y al círculo de nuevo en A' , de manera que $U'A'$ será igual a la bisectriz dada AU del ángulo dado, visto en el enunciado anterior (3.5).

La recta por U , en la bisectriz del ángulo dado y formando con AU un ángulo igual al ángulo $B'U'A'$, resuelve el problema propuesto, que tiene dos soluciones.

Ahora bien si analizamos la construcción de (3.5), ésta se puede simplificar.



Basta pues tomar sobre la bisectriz del ángulo dado un punto M tal que una perpendicular por M a dicha bisectriz corte al lado del ángulo en el punto B de forma que $BM = \frac{1}{2}BC$; luego una perpendicular por B al mismo lado del ángulo corta a la bisectriz en el punto D .

Trazamos ahora un arco de radio $\frac{1}{2}WA = \frac{1}{2}UA$ tangente en B a BD cuyo centro es O' . La recta DO' corta a dicho arco en F ; un arco con centro en D y radio DF corta a BM en W . La magnitud $BU = BW$ será la parte de BC entre U y C .

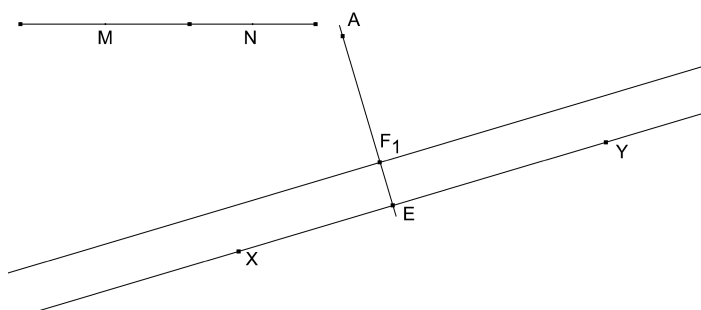
3.7 SEPTIMO PROBLEMA AUXILIAR

Un triángulo variable ABC , que permanece semejante a sí mismo, gira alrededor de uno de sus vértices A , mientras que otro vértice B recorre una recta fija XY ; se pide el lugar del tercer vértice C .

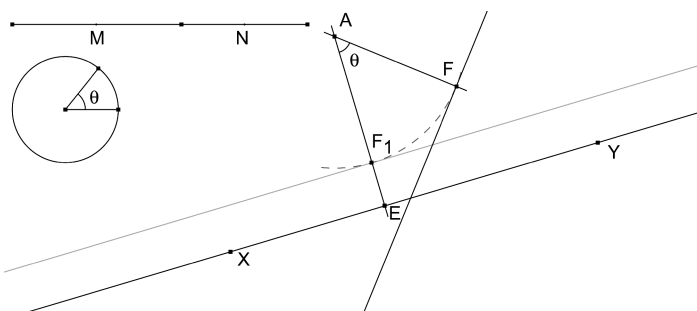
Evidentemente se puede modificar el enunciado de la manera siguiente:

Dados un punto fijo A y una recta fija XY ; por el punto A , se trazan dos rectas AB y AC que forman un ángulo dado; la primera encuentra a XY en B , se toma sobre la segunda un punto C tal, que la razón entre AC y AB sea igual a la razón de dos líneas dadas M y N : se pide el lugar del punto C .

Este enunciado corresponde a la determinación del lugar geométrico auxiliar que se pide en la resolución de H. Lez que a su vez proviene de la obra de Adolphe Desboves.



Si se considera en primer lugar el caso en que el ángulo es nulo, la recta AC se situará en la dirección AB , y el lugar del punto C será una paralela F_1H_1 a XY . Se tiene además un punto de esta paralela, trazando, desde el punto A , una perpendicular AE a XY , y determinando sobre su prolongación un punto F_1 tal, que la razón entre AF_1 y AE sea igual a la de las rectas dadas M y N .



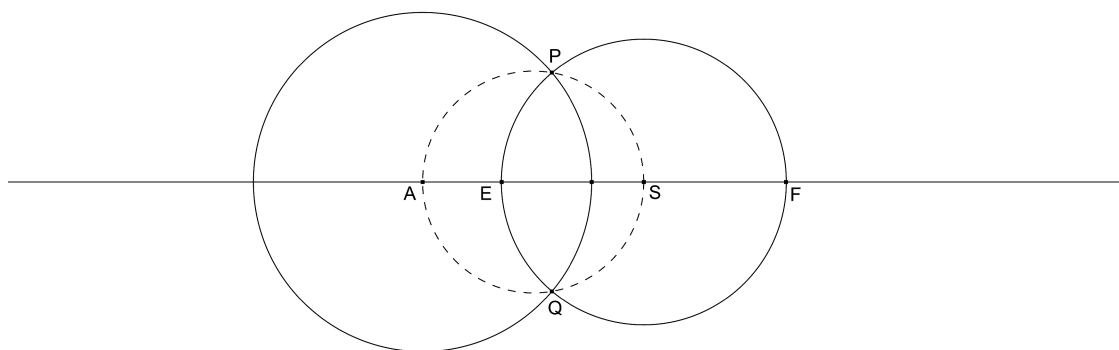
Ahora, si el ángulo es cualquiera, es evidente que el lugar no hará más que girar, alrededor del punto A , en un ángulo igual al dado. Entonces, para tener el lugar pedido, bastará con hacer un ángulo EAF igual al ángulo dado, tomar AF igual a AF_1 y trazar en el punto F la recta FH perpendicular a AF ; esta recta será el lugar pedido.

3.8 OCTAVO PROBLEMA AUXILIAR

Sobre una recta AS construir los puntos E y F , equidistantes de S , conjugados armónicos respecto de un círculo de centro A y radio dado.

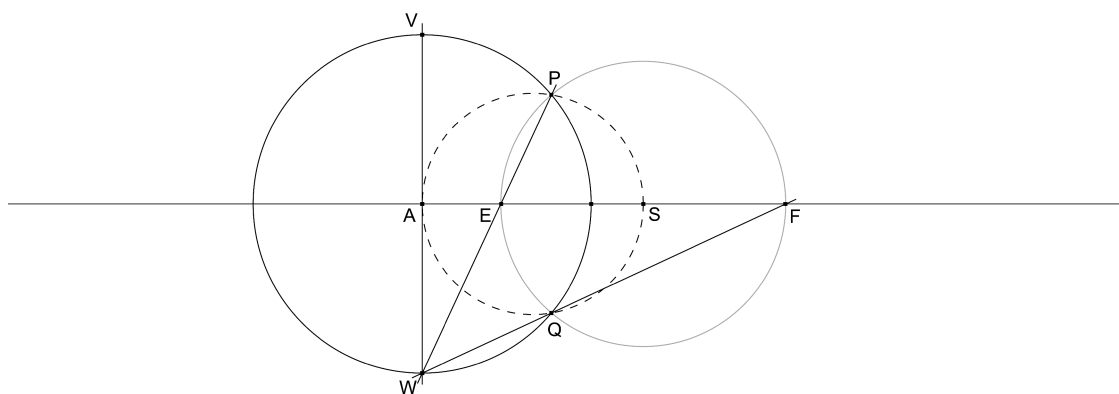
Este constituye un paso intermedio de la construcción de CL. Servais. También es la base del problema auxiliar para el tercer procedimiento de H. Lieber y F. von Lühmann.

Primera solución.



Está claro, si observamos el enunciado, que E y F son los extremos del diámetro de un círculo de centro S ortogonal al círculo A ; y ese es el círculo que se halla. Trazamos el círculo de diámetro AS , corta al círculo A en P y Q . El círculo de centro S que pasa por P y Q nos da la solución. E y F son las intersecciones de este círculo con la recta AS .

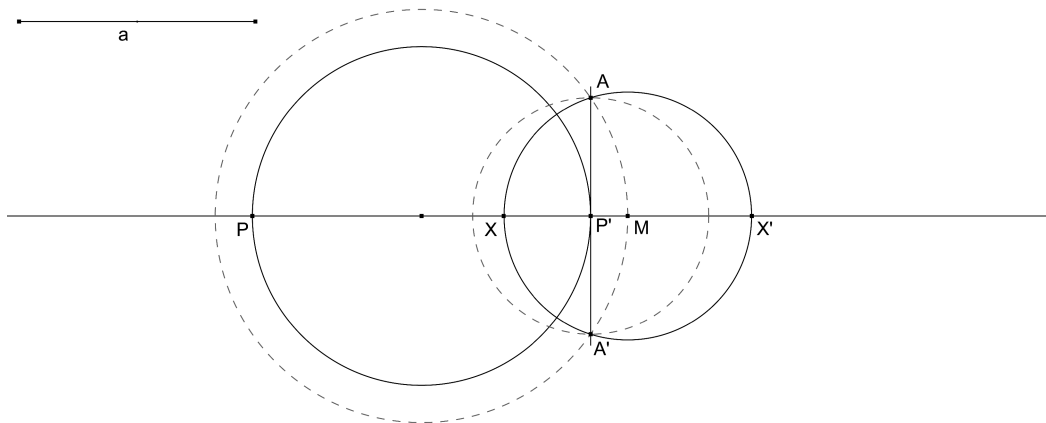
Segunda solución.



Como indica CL. Servais en su análisis, la construcción indicada se ejecuta fácilmente si se usan las proyecciones sobre el círculo A hechas desde un punto de este círculo; para este punto, se elegirá una de los extremos V , W del diámetro normal a AS , por ejemplo W . Las proyecciones de los puntos E y F sobre el círculo son los elementos dobles de una involución cuyo polo es el punto S . Los puntos dobles sobre el círculo A son los puntos de contacto de las tangentes desde S al círculo, P y Q . Las intersecciones de WP y WQ con la recta AS nos dan los puntos E y F .

3.9 NOVENO PROBLEMA AUXILIAR

Se dan P, P' . Se debe cortar PP' armónicamente mediante un segmento $XX' = a$.



Este enunciado permite la solución del problema original por medio del tercer procedimiento indicado por H. Lieber y F. Von Lühmann.

Este ejercicio se basa, como hemos indicado, en el octavo problema auxiliar (3.8). Como vimos, se trata de buscar un círculo ortogonal al círculo de diámetro PP' ; pero en este caso conocemos su diámetro, y por ello su radio; pero no su centro como era el caso en (3.8). No obstante si conociésemos ese centro, sabemos que la longitud de la tangente desde él al círculo de diámetro PP' sería igual a $\frac{1}{2}a$.

Sabemos que el lugar geométrico de los extremos de las tangentes de una longitud dada es un círculo concéntrico al original. Ese círculo en su intersección M con la recta que contiene a PP' , nos da el centro buscado.

El círculo de centro M y radio $\frac{1}{2}a$ nos da, con su diámetro sobre la recta que contiene a PP' , el segmento buscado.

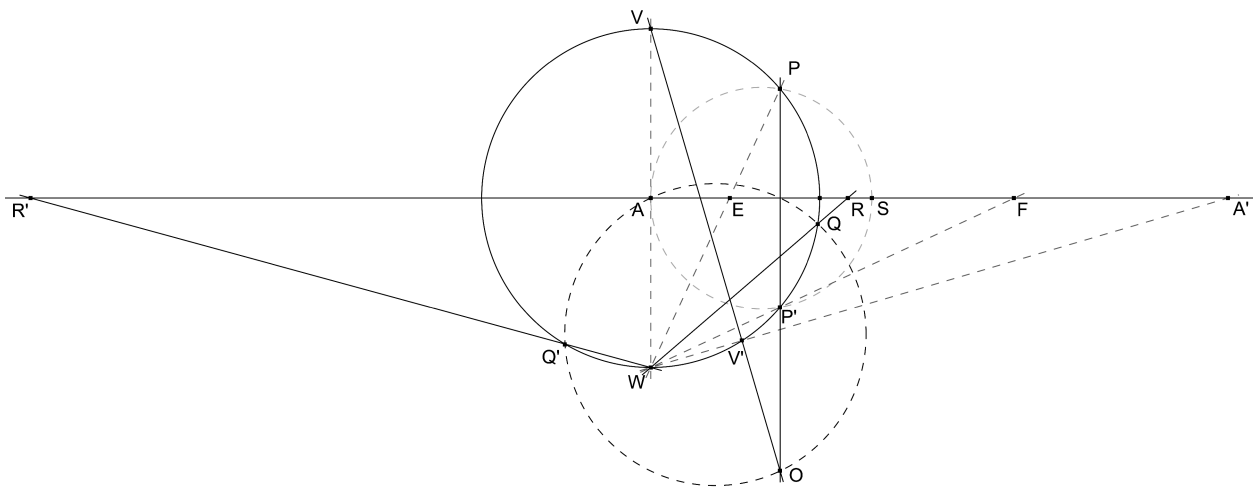
3.10 DECIMO PROBLEMA AUXILIAR

Hallar los puntos dobles de una involución definida por dos pares de puntos conjugados en ella E, F y A, A' .

La resolución de este enunciado permite la obtención de los puntos desde donde trazar las tangentes buscadas en la solución de CL. Servais.

Usaremos la proyección sobre un círculo para estudiar la involución.

Primera solución.



Usamos como centro de proyección el punto W . WP , WP' , WA y WA' dan sobre el círculo P , P' , V y V' respectivamente. PP' y VV' se cortan en O , que es por tanto el polo de la involución.

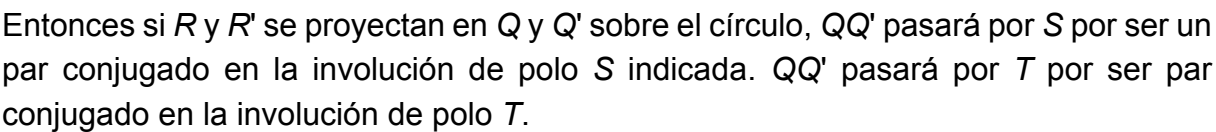
Sabemos que los puntos dobles coinciden sobre el círculo, y son los puntos de contacto de las tangentes desde el polo al círculo. Las intersecciones del círculo de diámetro OA con el círculo A nos dan Q y Q' . WQ y WQ' dan sobre la recta R y R' que son los puntos buscados.

Segunda solución.

Seguimos las indicaciones del propio CL. Servais.

E y F son los puntos dobles de una involución cuyo polo es S .

V y V' proyecciones de A y A' sobre el círculo y son los elementos dobles de una involución cuyo polo T también es el polo de la cuerda VV' respecto al círculo.



Es claro que la recta ST cortará al círculo A en los puntos conjugados comunes a las dos involuciones; estos puntos serán las proyecciones de R y R' .

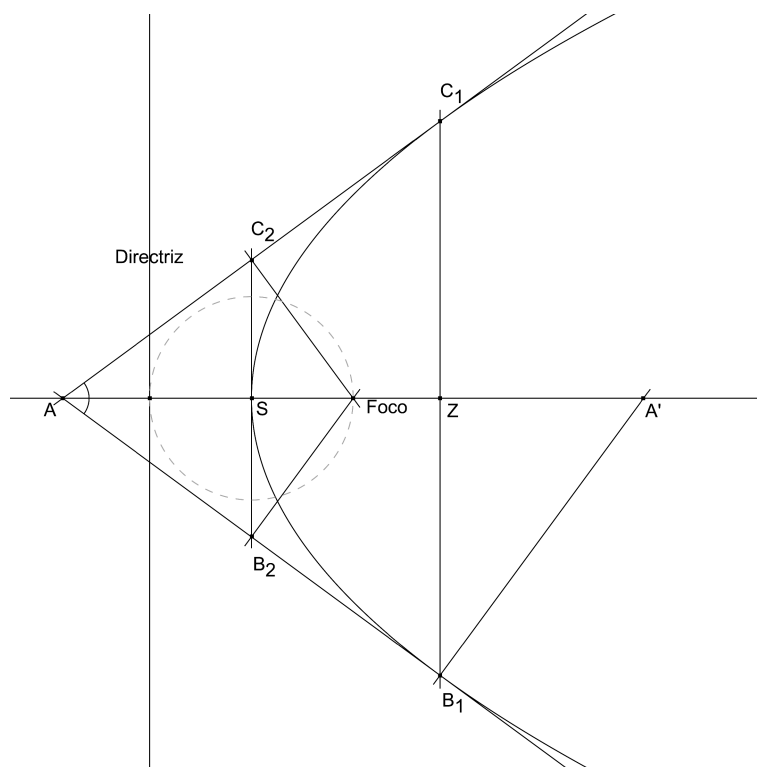
¡ Observemos que para esta segunda construcción podemos prescindir del trazado de los puntos E y F !

3.11 UNDECIMO PROBLEMA AUXILIAR

Dadas una parábola y un círculo cuyo centro se halla sobre el eje de dicha parábola, trazar las tangentes comunes al círculo y la parábola sin necesidad de trazar esta última.

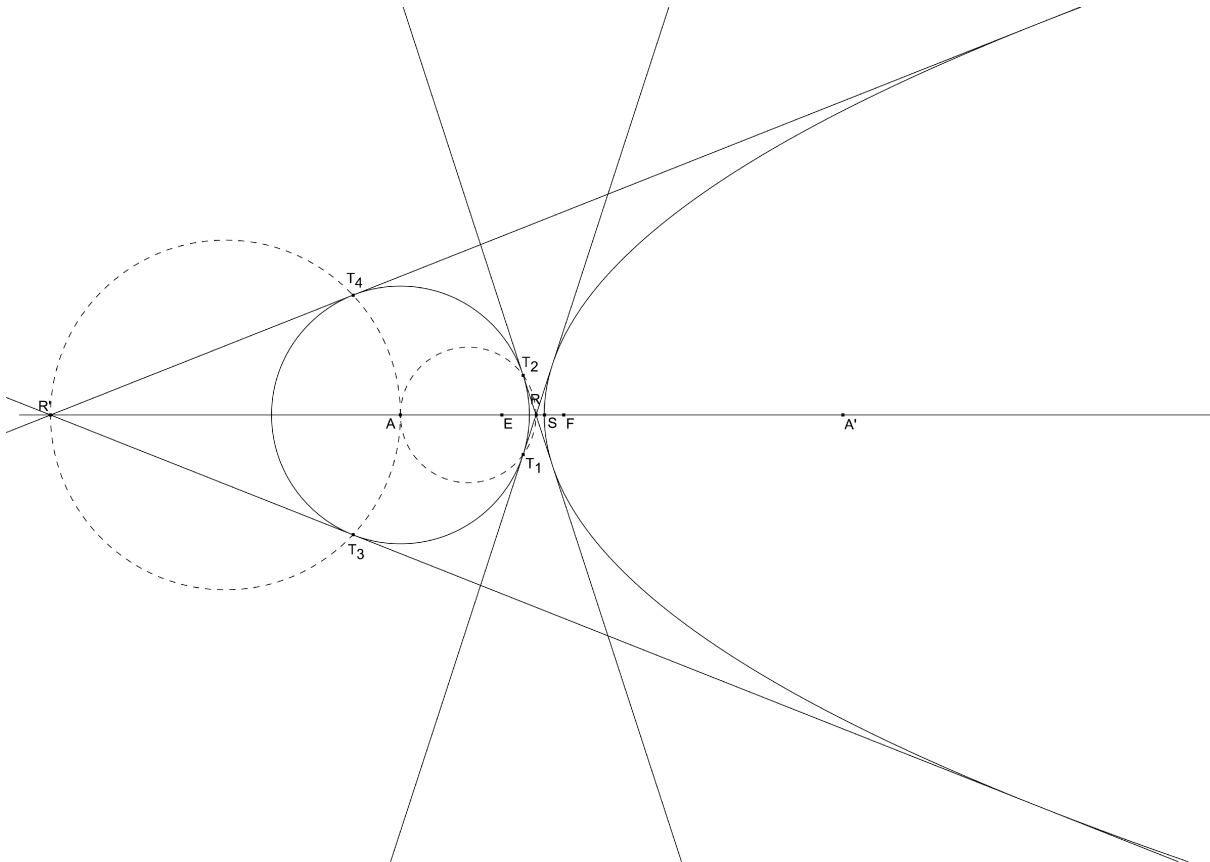
La resolución de este enunciado termina las soluciones presentadas por Emile Weber, CL. Servais y Elizabeth B. Davis. El dibujo de la parábola es sólo para mejorar la figura; pero nunca se necesita su trazado par construir las tangentes pedidas.

Generación de la parábola. Supongamos una transversal cualquiera que corta a un lado de un ángulo A en B y al otro en C . ¿Cuál es el lugar envolvente de las rectas BC así construidas de modo que sea la suma $BA + AC = a + b$ donde a y b son constantes?



Construimos el triángulo B_2AC_2 del siguiente modo, sobre los lados del ángulo A , llevamos $AB_2 = AC_2 = \frac{1}{2}(a + b)$. Dibujemos la bisectriz y sea S el punto medio de B_2C_2 sobre esa bisectriz, y levantemos la perpendiculares respectivas a AB_2 y AC_2 en B_2 y C_2 , que encuentran a la bisectriz en el foco de una parábola de la que AS es el eje, y B_2C_2 la tangente en el vértice S . Cada tangente a esta parábola corta en AB_2 y AC_2 segmentos AB cuya suma es $AB + AC = a + b$. Esta parábola también es tangente a los lados del ángulo A en los puntos B_1 y C_1 , tales que $AB_1 = AC_1 = b + c$. Necesitamos el punto A' simétrico de A respecto del foco de la parábola, que se puede construir como intersección entre el eje de la parábola y una perpendicular en B_1 a AB_1 .

Primera solución. Es la que corresponde a CL. Servais y parte de la determinación de los puntos dobles en una involución, tal como hemos visto en el décimo problema auxiliar (3.10).



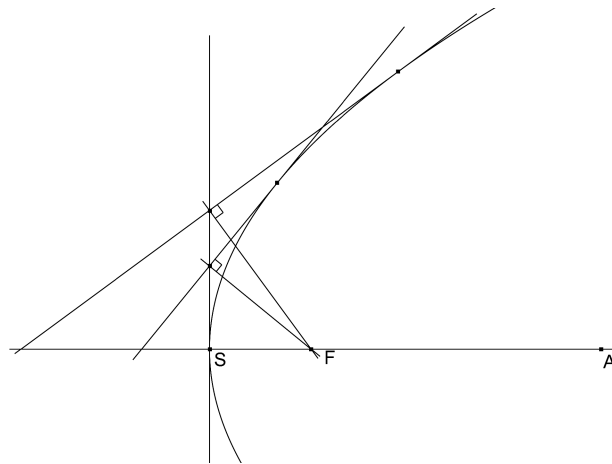
Se construyen las tangentes desde los puntos dobles R y R' al círculo A . Como desde cada punto se pueden trazar un par de tangentes al círculo, hay cuatro soluciones.

Obtenemos R y R' mediante la construcción presentada en el décimo problema auxiliar (3.10). El círculo de diámetro AR corta al círculo A en T_1 y T_2 . El círculo de diámetro AR' corta al círculo A en T_3 y T_4 .

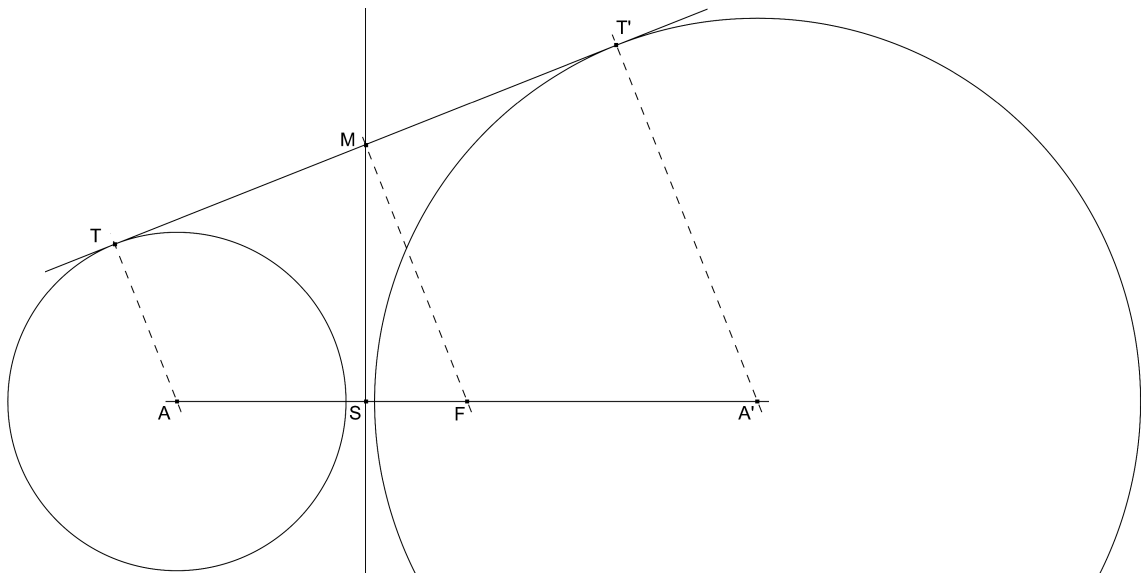
Las rectas RT_1 , RT_2 , $R'T_3$ y $R'T_4$ son las tangentes buscadas. Los puntos E y F de la construcción auxiliar (3.10) y el punto G en el infinito de B_2C_2 , son los vértices del triángulo conjugado respecto del círculo A y de la parábola. Se sabe que una recta l y la recta L_1L_2 que une a los polos L_1 y L_2 de l respecto de dos cónicas círculo y parábola determinan sobre un lado EF del triángulo EFG conjugado respecto del círculo y la parábola dos puntos conjugados en una involución cuyos puntos dobles pertenecen a las tangentes comunes al círculo y a la parábola; el par EF forma parte de esta involución, Si l es la recta AB_2 , el punto L_1 está en el infinito de una perpendicular a esta recta y L_2 es idéntico a B_2 . Así AA' es un par de la involución citada, lo que establece la construcción anterior.

Segunda solución. Es la que corresponde a Emile weber que utiliza el siguiente teorema: “una tangente común a una parábola y a un círculo que tiene su centro A sobre el eje, es tangente a un segundo círculo que tiene por centro A' , simétrico de A respecto al foco, y por eje radical con el círculo A , la tangente a la parábola en el vértice.”

Para demostrarlo, seguimos una indicación de Philippe Chevanne, conseguida a través de Francisco Javier García Capitán en Hyacinthos, que señala que este resultado es obvio a partir de las dos siguientes propiedades, una de la parábola y otra del je radical:



- **Primera propiedad.** La proyección ortogonal del foco sobre una tangente cualquiera de la parábola se halla sobre la tangente a la parábola en el vértice.



- **Segunda propiedad.** Las tangentes comunes a dos círculos se encuentra sobre el je radical de ambos círculos.

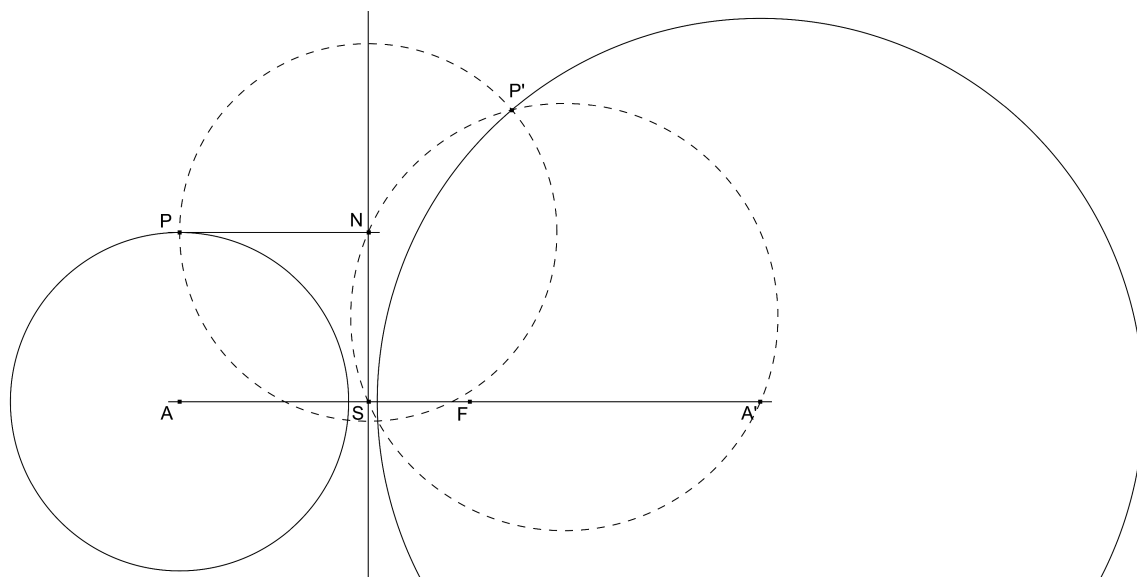
Supongamos que tenemos los dos círculos y tenemos la tangente común TT' , nos bastará demostrar que TT' también es tangente a la parábola.

La proyección de AFA' sobre TT' da M , el punto medio de TT' , como proyección de F , entonces por la segunda propiedad enunciada más arriba, M está sobre el eje radical de los dos círculos; es decir, está sobre la tangente a la parábola en el vértice.

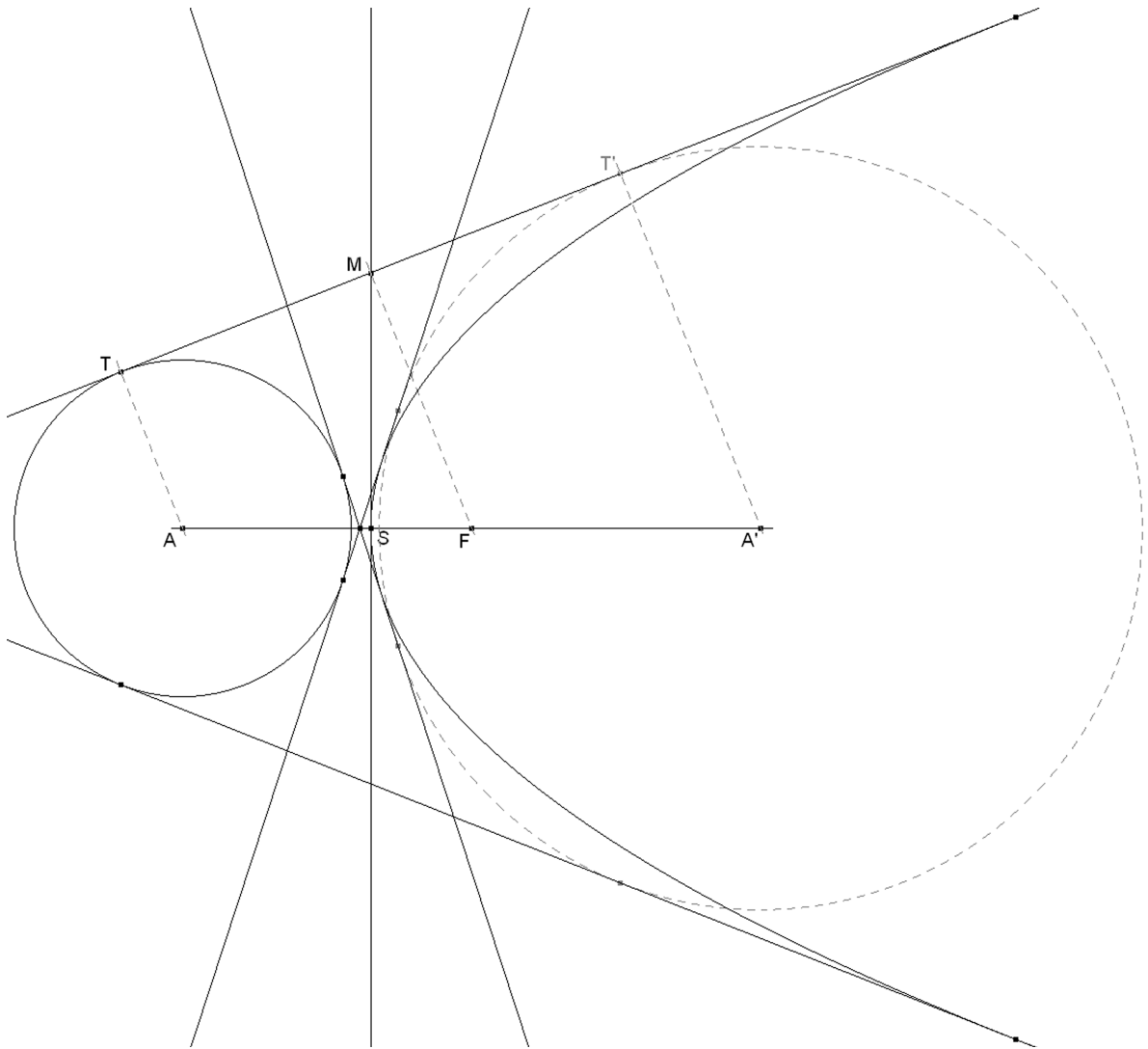
MF es perpendicular a TT' , por la primera propiedad, TT' es tangente a la parábola.

Se puede también pensar en una demostración en sentido contrario. Consideremos la tangente común a la parábola y al círculo de centro A sobre el eje de dicha parábola, y definamos un círculo de centro A' también sobre el eje de esa parábola y que tenga un punto de tangencia T' con la mencionada tangente, simétrico de T respecto a M . Habrá que demostrar que A' es el simétrico de A respecto al foco F de la parábola.

El teorema considera un segundo círculo con centro en A' simétrico de A respecto del foco F de la parábola; por tanto F es el punto medio de AA' . Este segundo círculo es tal que la tangente en el vértice de la parábola es el eje radical de ambos círculos. De acuerdo con la teoría de haces de círculos, existe a los sumo un círculo así y es único y lo hallamos a continuación.



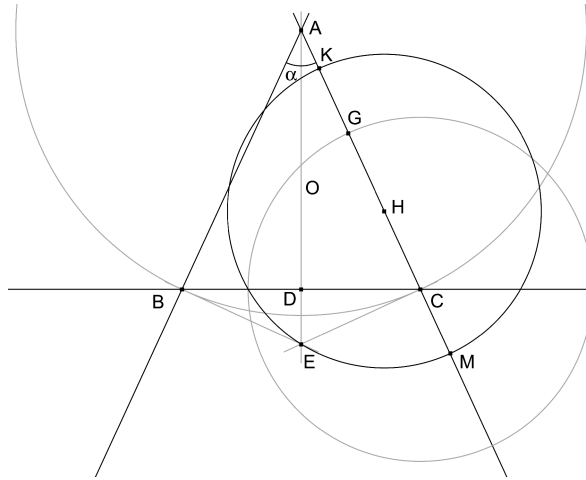
Aplicamos la propiedad del eje radical. Tomamos un punto arbitrario N del eje radical y trazamos la tangente NP al círculo A ; el punto P' , punto de contacto en el otro círculo de la tangente NP' , estará sobre el círculo de centro N y radio NP . Por otra parte como NP' es tangente en P' al círculo de centro A' es perpendicular al radio $A'P'$ y por tanto está sobre el círculo de diámetro NA' . Obtenemos P' y trazamos el círculo buscado con centro en A' que pasa por P' cuyo eje radical con el círculo A es SN .



Hallado el círculo auxiliar trazamos las tangentes comunes a los dos círculos y obtenemos cuatro soluciones.

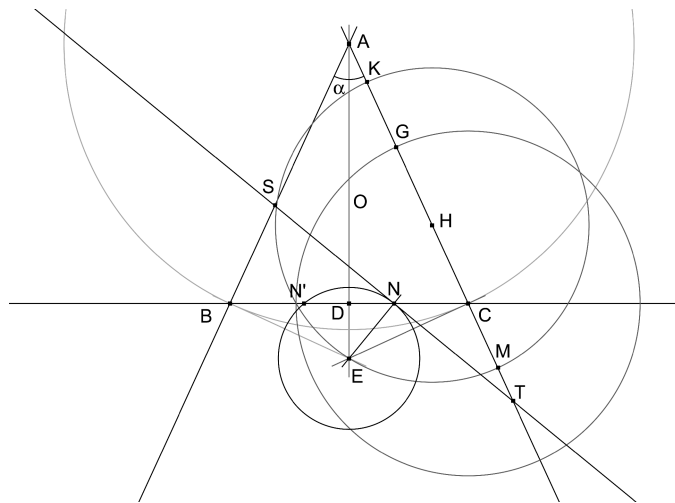
Tercera solución. Es la presentada por Elizabeth B. Davis que traza una recta y a posteriori demuestra que es tangente al círculo y más adelante demuestra que también es tangente a la parábola que genera como hemos explicado al principio de este apartado aunque como los demás tampoco utiliza el trazado de la mencionada parábola.

Como hemos visto en (2.9), si la suma de los dos lados es $2k$, el ángulo comprendido α , y la altura sobre el tercer lado R . Se construye un triángulo BAC , haciendo $\angle A = \alpha$ y $AB = AC = k$. Se dibuja AO , la bisectriz de $\angle A$, y se erigen perpendiculares a AB y AC en B y C , respectivamente, que encuentran a AO en E . Sea D el punto medio de BC sobre AO .



En CA , se corta $CG = R$. Biséquese CG en H , y con H como centro y HE como radio descríbese un semicírculo que encuentra a AC , prolongado si es necesario, en K y M . (Para este propósito basta con hallar los puntos K y M). Entonces $GK = CM$. Además, como E está en la circunferencia, y EC es perpendicular al diámetro KM , tenemos

$$EC^2 = (R + GK) \cdot CM = (R + CM) \cdot CM.$$



Con E como centro, y radio CM , descríbese un arco que corte a BC en los puntos N y N' . Unase EN (o EN'). Por N (o N'), trácese ST (o $S'T'$), perpendicular, respectivamente a EN o a EN' . Entonces ST (o $S'T'$) son las tangentes comunes a círculo y parábola.

Veamos primero que ST ($S'T'$) es *tangente a la parábola*. Ya que EN , la perpendicular desde E a ST , encuentra a ST en su intersección con BC , se sigue que ST es tangente a la parábola. En consecuencia, la suma de sus secciones en AB y AC es $2k$. Es decir, $AS + AT = 2k$.

Veamos ahora que ST ($S'T'$) es tangente al círculo de centro A y radio R . Trácese AL (o AL') perpendicular a ST (o $S'T'$), prolongada si es necesario. Entonces $AL = R$. Los $\triangle ALQ$ y $\triangle ENQ$, ambos rectángulos, y con ángulos en Q iguales, son semejantes, y

$$AL : EN = AQ : EQ.$$

Por composición,

$$(AL + EN) : EN = AE : EQ. \quad (1)$$

Pero en el triángulo rectángulo ENQ , ND es perpendicular a la hipotenusa EQ . Consecuentemente,

$$EQ = EN^2 : ED.$$

Sustituyendo este valor de EQ en (1), y dividiendo el segundo y cuarto término por EN , tenemos

$$(AL + EN) : 1 = AE : EN/ED,$$

o

$$(AL + EN) \cdot EN = AE \cdot ED.$$

Pero en el triángulo rectángulo ACE ,

$$AE \cdot ED = EC^2,$$

y se ha mostrado que

$$EC^2 = (R + CM) \cdot CM.$$

Por consiguiente

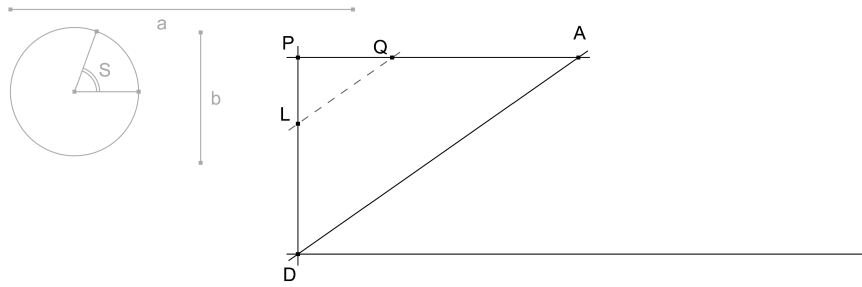
$$(AL + EN) \cdot EN = (R + CM) \cdot CM.$$

Pero $EN = CM$ por construcción. Por tanto $AL = R$.

Como se ha indicado en la demostración, hay dos posibles soluciones.

4. CONSTRUCCIONES DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA

4.1 CONSTRUCCION - PHILIPPE DE LA HIRE



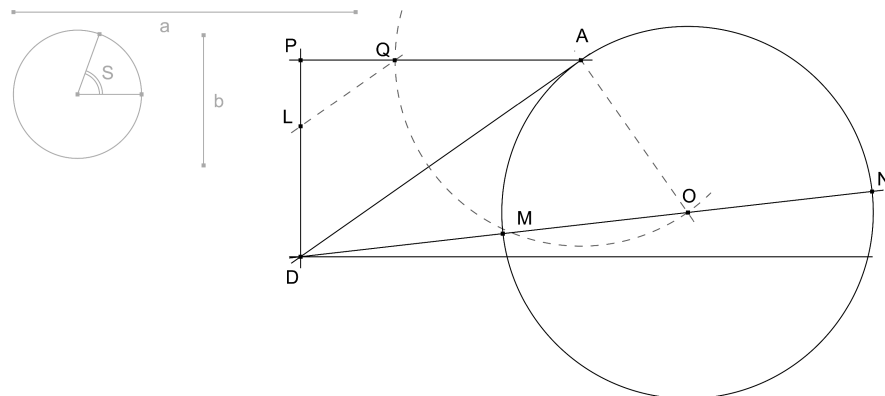
Sea la suma a , la altura b y el ángulo S .

Por un punto D trazamos una recta cualquiera y una recta $DA = a$ que forma con la anterior un ángulo $\frac{1}{2}S$. Por A trazamos una paralela a la recta inicial que corta a una perpendicular por D en P . $DP = AK = d$ y $AP = KD = c$.

Como necesitamos $\frac{bc}{d}$, tomamos sobre la perpendicular un punto L tal que $DL = b$, por

L , trazamos una paralela a DA que corta a AP en Q y obtenemos la siguiente proporción

$$\frac{DP}{DL} = \frac{AP}{AQ} \Rightarrow AQ = \frac{DL \cdot AP}{DP} = \frac{bc}{d}.$$

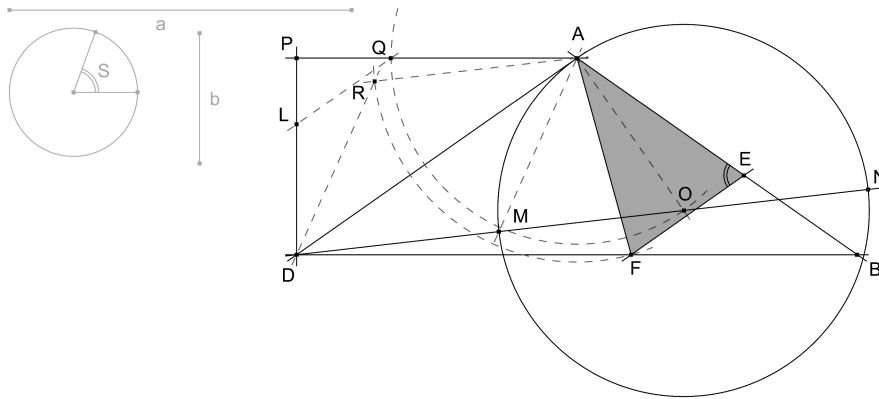


Para resolver

$$z^2 + \frac{2bc}{d}z = c^2 + d^2 = a^2 \Rightarrow z \cdot (z + 2AQ) = AD^2,$$

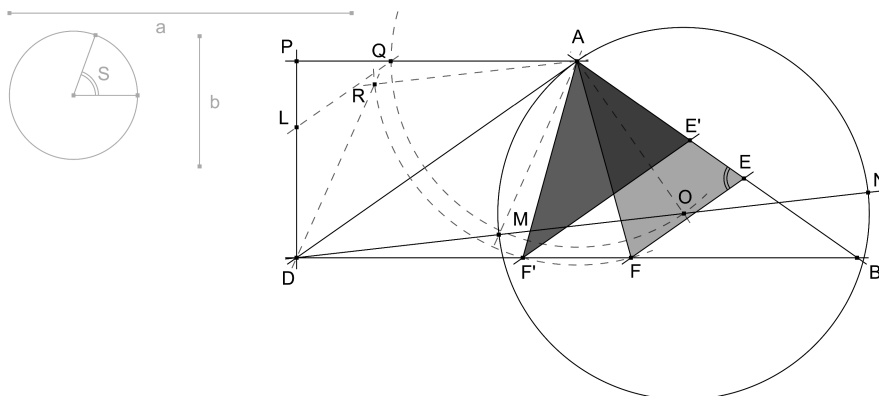
usamos la primera construcción de (3.1). Con centro O y radio AQ trazamos un círculo de radio AQ tangente a AD en A ; una recta por D y O corta al círculo en M y en N . La

base del triángulo buscado es $MD = z$.



Trasladamos paralelamente MD hasta obtener $AR = MD$. Un arco con centro en A y radio AR corta a la recta inicial por D en F , tomamos B sobre esa recta tal que $AB = AD$; y una paralela por F a AD corta a AB en E .

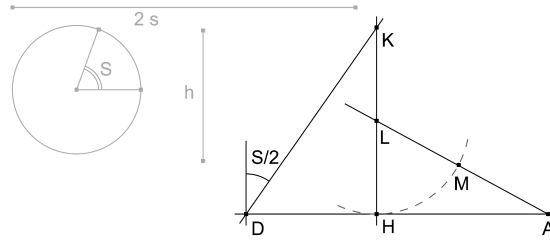
AEF es el triángulo buscado.



La segunda intersección F' proporciona otro triángulo solución que intercambia los lados del primero.

Como se aprecia, ND es otra solución para z ; pero los triángulos que se obtienen poseen como ángulo opuesto a la base el suplementario del dado, la misma altura y la diferencia de lados igual al segmento dado a (la suma de lados del problema original).

4.2 CONSTRUCCION - SIMON A. J. LHUILIER



Sea la suma $2s$, la altura h y el ángulo S .

Aunque sabemos resolver la ecuación de segundo grado, construimos en primer lugar

$$b = \sqrt{s^2 + \frac{h^2}{4} \cot^2 \frac{S}{2}} - \frac{h}{2} \cot \frac{S}{2}$$

donde b es la semi base del triángulo buscado.

Por un punto D trazamos una recta cualquiera y sobre ella un punto H tal que $DH = h$. Trazamos por D una recta que forma con DH un ángulo $(90^\circ - \frac{1}{2}S)$ y corta a una perpendicular por H a DH en un punto K ; entonces

$$\tan \frac{S}{2} = \frac{DH}{KH} = \frac{h}{KH} \Rightarrow KH = h \cot \frac{S}{2}.$$

Tomamos A en la prolongación de DH de modo que $HA = s$. Entonces si L es el punto medio de HK

$$AL = \sqrt{HA^2 + HL^2} = \sqrt{HA^2 + \left(\frac{HK}{2}\right)^2} = \sqrt{s^2 + \frac{h^2}{4} \cot^2 \frac{S}{2}}.$$

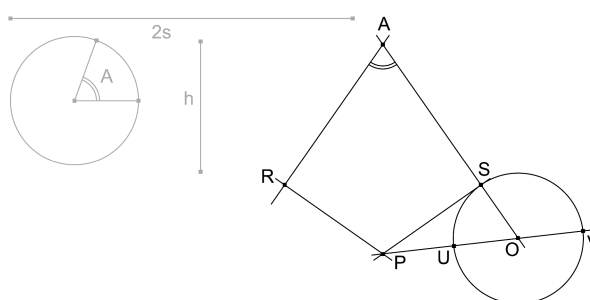
Un arco con centro en L y radio LH corta a AL en M , de ahí

$$AM = AL - ML = AL - HL = AL - \frac{HK}{2} = \sqrt{s^2 + \frac{h^2}{4} \cot^2 \frac{S}{2}} - \frac{h}{2} \cot \frac{S}{2} = b.$$

Sobre la prolongación de AM tomamos A' de manera que $MA' = AM$; entonces AA' es la base del triángulo buscado.

Tomamos a continuación la construcción auxiliar (3.3) y terminamos.

4.3 CONSTRUCCION - NATHAN ALTSHILLER-COURT



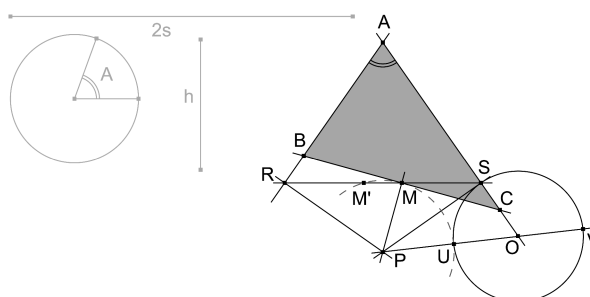
Sea la suma $2s$, la altura h y el ángulo A .

Trazamos un ángulo igual al dado de vértice A . Tomamos un punto R sobre el primer lado y un punto S sobre el segundo de forma que $AR = AS = s$. Por R , levantamos una perpendicular a AR y por S una a AS ; estas perpendiculares se encuentran en P .

Hay que resolver la ecuación

$$PS^2 = PM \cdot (PM + h);$$

siguiendo la primera construcción auxiliar de (3.1), trazamos un círculo de centro O y diámetro h , tangente en S a PS . Desde P trazamos una recta que pase por O y que corta al círculo en U y V . PU es una solución de la ecuación.

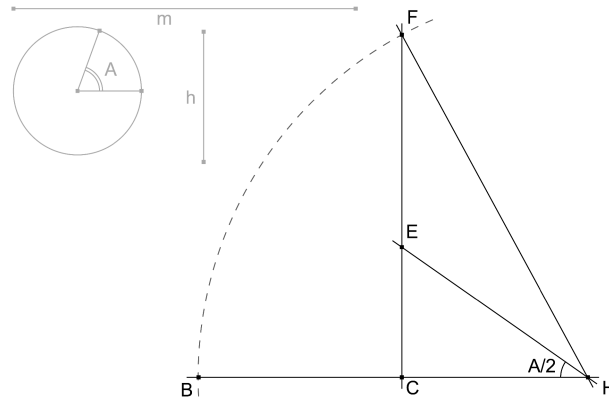


Un arco con centro en P y radio PU corta a la recta por R y S en M y M' ; una perpendicular a PM por M corta a AR y AS respectivamente en B y C . El triángulo BAC es el triángulo pedido.

La perpendicular a PM' nos da otro triángulo solución cuya diferencia con el anterior es el intercambio de lados.

PV , otra solución de la ecuación, proporciona un triángulo con ángulo complementario al dado, misma altura y diferencia de lados igual a $2s$ (la suma dada del original).

4.4 CONSTRUCCION - EMILE LEMOINE



Sea la suma m , la altura h y el ángulo A .

Por un punto C trazamos una recta cualquiera. Tomamos el punto E sobre una perpendicular por C a dicha recta, de modo que $CE = h$. Por E trazamos una recta que corta a la recta inicial en H de forma que sea el ángulo $CH E = \frac{1}{2}A$ y tenemos

$$\frac{CH}{CE} = \cot A / 2 = \frac{CH}{h} = \frac{CH}{AI} = \frac{CD}{CA} \Rightarrow CH = AI \frac{CD}{CA} = h \frac{CD}{CA}.$$

Resolvemos ahora la ecuación

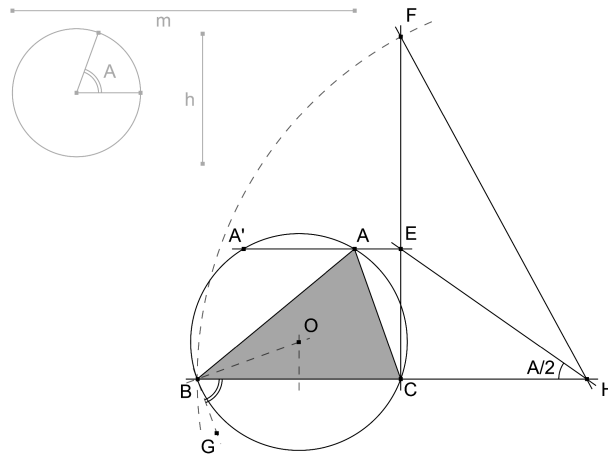
$$m^2 = BC \cdot (BC + CT) = BC \cdot (BC + 2CH) \Rightarrow m^2 + CH^2 = (BC + CH)^2 = BH^2$$

por medio de un triángulo rectángulo de catetos m y CH ; para ello sobre la prolongación de CE tomamos un punto F tal que $CF = m$ entonces

$$FH^2 = CF^2 + CH^2 = m^2 + CH^2 = BH^2$$

y con centro H un arco de radio HF corta a la prolongación de HC en B .

Tenemos pues BC que es la base del triángulo buscado, es por ello que a partir de aquí usamos la construcción auxiliar (3.3).

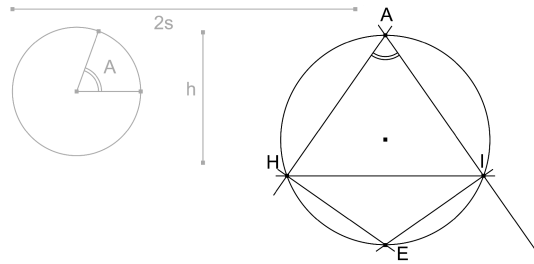


Sobre el segmento BC trazamos el arco capaz del ángulo dado A . Como $CE = h$, trazamos por E una paralela a BC que encuentra al arco capaz en A y en A' . El triángulo BAC es el triángulo buscado.

La otra intersección A' determina otro triángulo solución que difiere del anterior por intercambiar los lados.

El hecho de haber resuelto la ecuación mediante un triángulo rectángulo elimina las soluciones no correspondientes al problema original.

4.5 CONSTRUCCION - M. EMMERICH

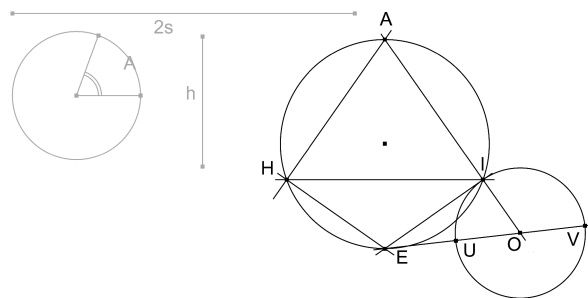


Sea la suma $2s$, la altura h y el ángulo A .

Trazamos el ángulo dado de vértice A . Tomamos sobre el primer lado del ángulo el punto H y en el segundo lado el punto I , de modo que $AH = AI = s$. Levantamos por H e I perpendiculares a los lados correspondientes que se cortan en E ; como AHE y AIE son ángulos rectos, el polígono $AHEI$ es inscriptible en un círculo de diámetro AE .

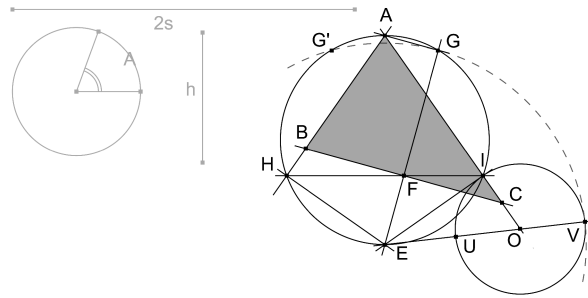
Ya sólo nos falta encontrar G sobre el círculo tal que EG corte a HI en F y que sea el segmento $FG = h$; para ello podemos utilizar el problema auxiliar (3.4) o el problema auxiliar (3.5). Por ejemplo, la ecuación $DW \cdot (DW + WA) = DB^2$ de la segunda construcción del problema auxiliar (3.5) se convierte en

$$EI^2 = EF \cdot (EF + FG) = EF \cdot EG = \begin{cases} EF \cdot (EF + h) \\ (EG - h) \cdot EG \end{cases}$$



Trazamos el círculo de centro O , con diámetro h y tangente en I a EI ; una recta por E y O corta a este círculo en U y V . Observemos que EU proporciona EF y EV proporciona EG .

Nosotros iremos a la solución final usando el punto G sobre el círculo $AHEI$.

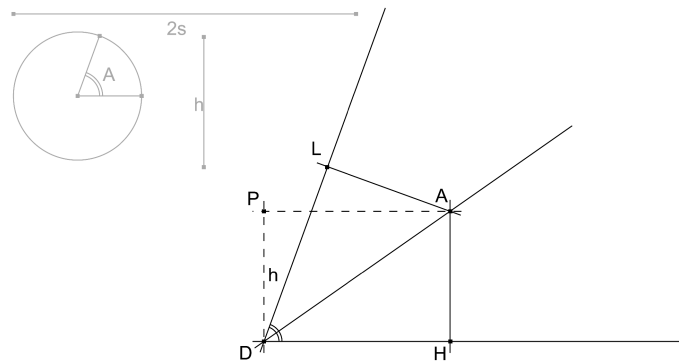


Con centro en E y radio EV trazamos un arco que corta al círculo circunscrito $AHEI$ en G y G' . La recta EG corta a HI en F trazamos por F una perpendicular a EG (o una paralela a AG) que corta a AH y AI en B y C respectivamente. El triángulo BAC es el triángulo solución.

Si tomáramos G' , obtendríamos otro triángulo solución que diferiría del anterior en que tendría los lados intercambiados.

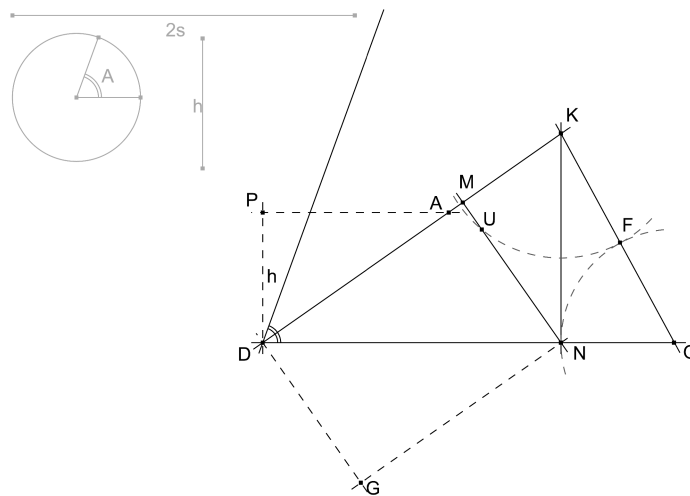
Si hubiéramos utilizado un arco de centro E y radio EU , hubiéramos obtenido F y F' en su intersección con HI , EF hubiera encontrado al círculo $AHEI$ en G y hubiéramos acabado igualmente la construcción. Análogo para F' .

4.6 CONSTRUCCION - H. LEZ (ADOLPHE DESVOBES)



Sea la suma $2s$, la altura h y el ángulo A .

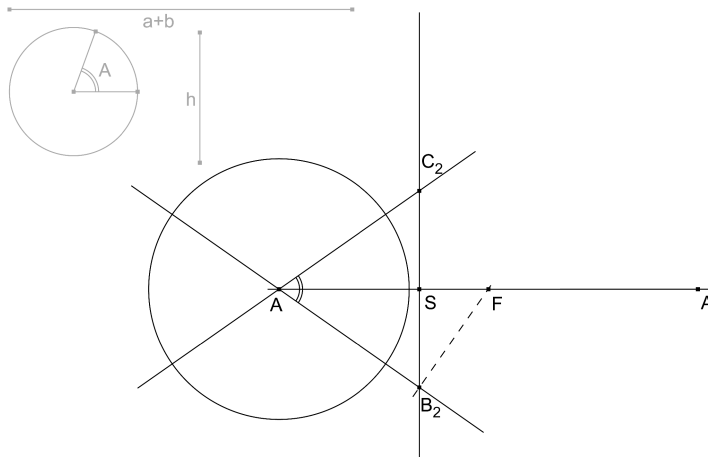
Si seguimos la construcción de la recta según el lugar geométrico del problema auxiliar (3.7), trazamos $AH = h$ y por A una recta AL que forme con AH el ángulo dado, y por el punto L una recta LD perpendicular a AL . Pero esta ecuación es equivalente a trazar, con vértice D , el ángulo dado y trazar sobre su bisectriz un punto A a distancia h de los lados.



Proseguimos ahora con la simplificación del problema de Pappus (3.6). Tomamos un punto M sobre la bisectriz de forma que la perpendicular a dicha bisectriz por M corta al lado del ángulo en un punto N tal que $MN = s$. Desde N trazamos una perpendicular al lado del ángulo que corta a la bisectriz en K .

Ahora, con radio $\frac{1}{2}AD$ trazamos un arco tangente en N a KN cuyo centro es O . La recta KO corta al arco en F ; un arco de centro K que pase por F corta a MN en U . La magnitud UN es la longitud buscada desde A al lado del ángulo.

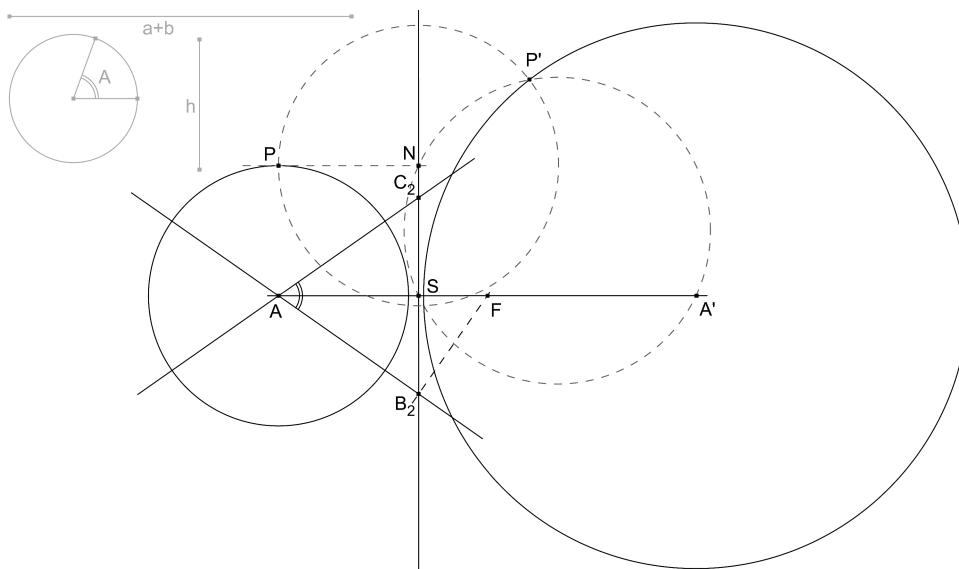
4.7 CONSTRUCCION - EMILE WEBER



Sea la suma $a + b$, la altura h y el ángulo A .

Trazamos el ángulo dado con vértice en A con su bisectriz; tomamos, sobre los lados del ángulo, respectivamente los puntos B_2 y C_2 de modo que $AB_2 = AC_2 = \frac{1}{2}(a + b)$. La recta B_2C_2 (tangente en el vértice a la parábola) corta a la bisectriz en S . Una perpendicular a AB_2 por B_2 encuentra a la bisectriz en F (foco de la parábola).

Con centro en A trazamos un círculo de radio h . Nos queda entonces hallar el círculo de centro A' (simétrico de A respecto de F) y que tenga con el círculo anterior de centro A a B_2C_2 como centro radical; construcción que hemos visto al final de la segunda solución de (3.11).

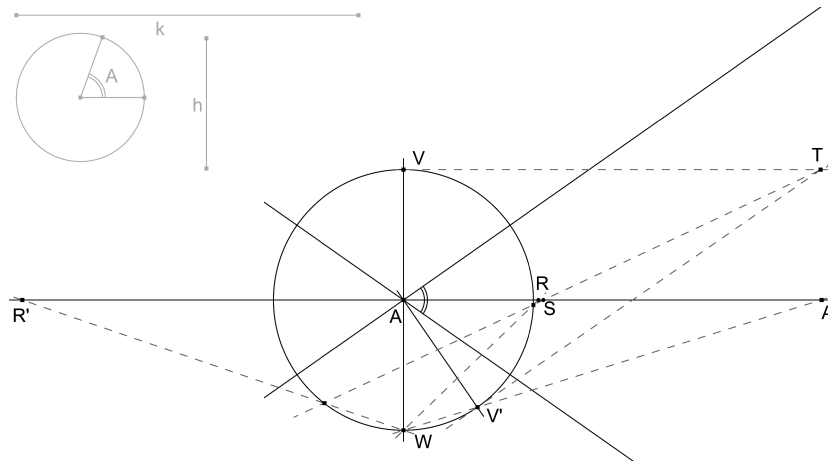


Por unto arbitrario N del eje radical tomamos un punto N desde el que trazamos al

BAC es un triángulo solución del problema propuesto. La otra tangente interior proporciona un segundo triángulo solución que difiere del anterior por tener los lados intercambiados.

Las tangentes exteriores proporcionan triángulos con la misma altura; pero con el ángulo en el vértice suplementario del ángulo dado y cuya diferencia de lados es igual a la suma dada en el enunciado.

4.8 CONSTRUCCION - CL. SERVAIS

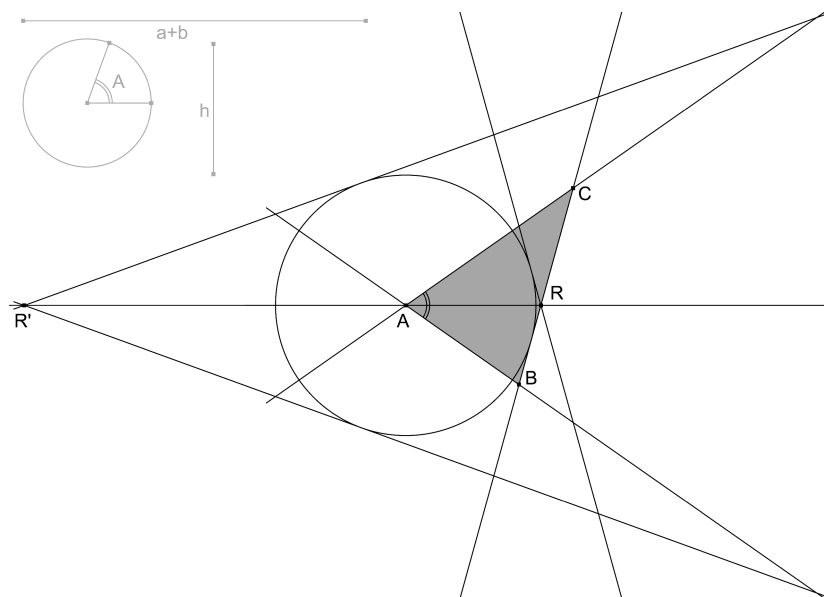


Sea la suma k , la altura h y el ángulo A .

Trazamos el ángulo dado de vértice A con su bisectriz. Sobre un lado del ángulo llevamos los puntos B_1 y B_2 de manera que $AB_1 = 2AB_2 = k$. Por B_1 levantamos una perpendicular al lado que corta a la bisectriz en A' y por B_2 una perpendicular a la bisectriz cuya intersección con la misma es S . Con centro en A y radio h trazamos un círculo de diámetro perpendicular a la bisectriz WV .

Aplicando la segunda construcción de (3.10), podemos prescindir de los puntos E y F y hallar directamente los puntos dobles R y R' .

WA y WA' cortan al círculo de centro A respectivamente en V y V' . Las tangentes al círculo en esos puntos se cortan en T ; las rectas que unen al punto W con los puntos de intersección de la recta ST con el círculo de centro A cortan a la bisectriz en R y R' .

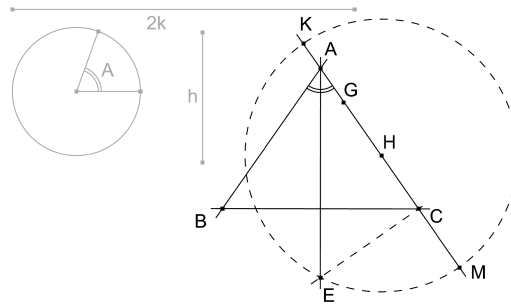


Trazadas las cuatro tangentes, tomamos un de las tangentes por R que corta a los lados del ángulo en B y C respectivamente. El triángulo BAC es un triángulo solución del enunciado propuesto.

La otra tangente por R proporciona un segundo triángulo solución que se distingue del anterior por tener los lados intercambiados.

Las tangentes por R' , como se observa en la figura, proporcionan triángulos de la misma altura; pero con el ángulo en el vértice suplementario al dado y la diferencia de lados igual a k , que es la suma de lados del enunciado.

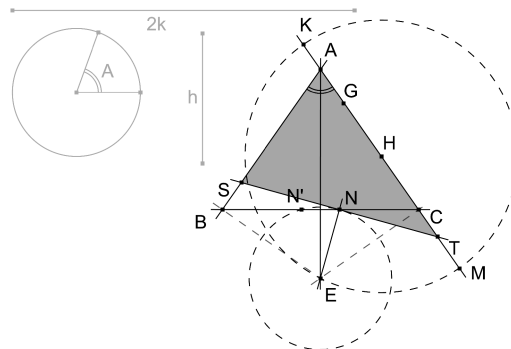
4.9 CONSTRUCCION - ELIZABETH B. DAVIS



Sea la suma $2k$, la altura h y el ángulo A .

Trazamos el ángulo dado de vértice A con su bisectriz. Tomamos respectivamente sobre los lados dos puntos B y C de modo que $AB = AC = k$. Una perpendicular por C al lado del ángulo corta a la bisectriz en E .

Tomamos sobre CA un punto G tal que $CG = h$. El punto medio de CG es H , y con H como centro y HE como radio se describe un semicírculo que encuentra a AC o a sus prolongaciones en K y M . Basta con hallar los puntos K y M .



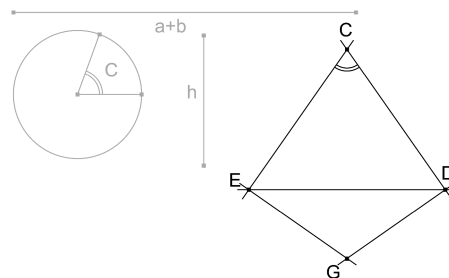
Con E como centro, y CM como radio, se describe un arco que corta a BC en los puntos N y N' . Por N se traza una perpendicular a EN que corta a los lados del ángulo respectivamente en S y T . Entonces SAT es el triángulo que se busca.

Una perpendicular a EN' proporciona otro triángulo solución que difiere del anterior por tener los lados intercambiados.

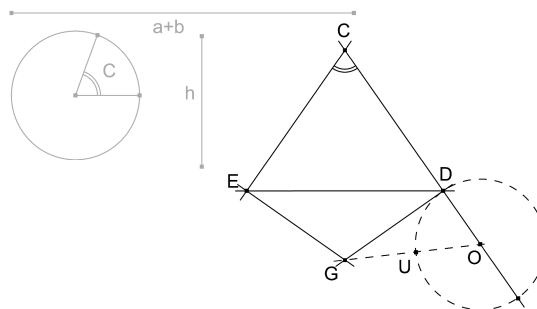
4.10 CONSTRUCCION - H. LIEBER Y F. VON LÜHMANN.

Sea la suma $a + b$, la altura h y el ángulo C .

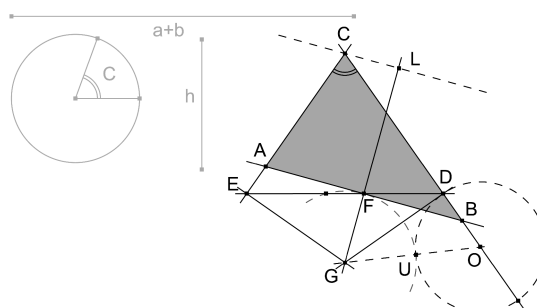
Primera construcción. Observemos que aunque el análisis es algo diferente, conduce en esencia a la misma construcción presentada por E. Emmerich; pero en este caso prescindimos del círculo circunscrito.



Trazamos el ángulo dado de vértice C . Sobre los lados, tomamos respectivamente los puntos D y E de modo que $CD = CE = \frac{1}{2}(a + b)$. Por D y E levantamos perpendiculares a sus lados correspondientes, éstas se encuentran en G .



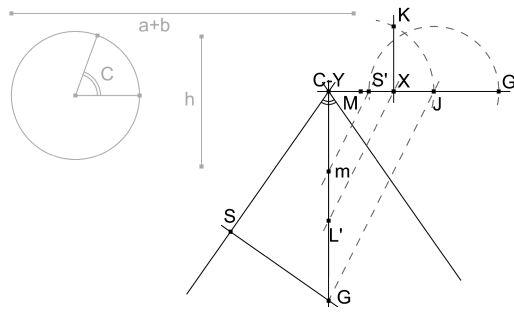
Hay que resolver la ecuación $GF \cdot GL = GD^2$ con $GL - GF = h$. Trazamos el círculo de diámetro h tangente a GD en D cuyo centro es O . GO corta a este círculo en U . GU es una solución de la ecuación.



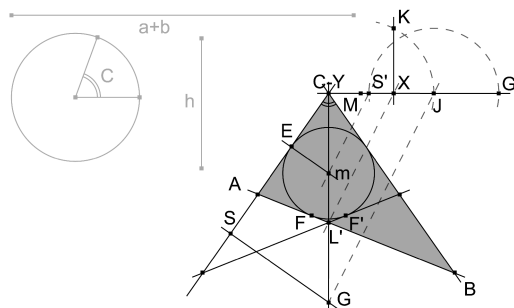
Con centro en G y radio GU trazamos un arco que corta a DE en F y F' .

El triángulo ABC es el triángulo que responde al enunciado. La utilización del punto F proporciona otro triángulo solución distinto al anterior por tener los lados intercambiados.

[illegible]
$$(a + b)^2 = AB \cdot BL = AB \cdot (AB + AL) = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot \frac{1}{2}AL$$
$$(a + b)^2 + (\frac{1}{2}AL)^2 = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot \frac{1}{2}AL + (\frac{1}{2}AL)^2 = (AB + \frac{1}{2}AL)^2;$$



Trazamos desde J una recta por G , una paralela a JG por S' corta a la bisectriz en m y una paralela a JG por X corta a la bisectriz en L' .

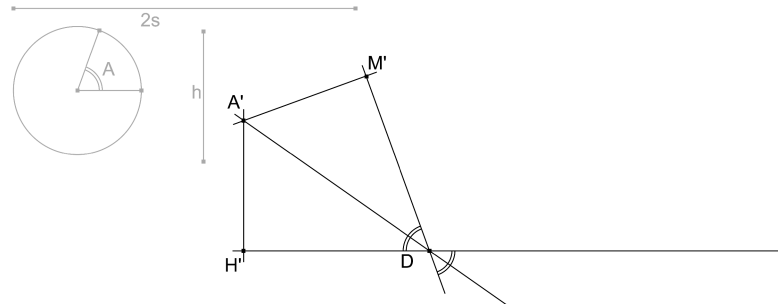


Una paralela a SG por m encuentra al lado del ángulo en el punto de contacto E con el círculo inscrito. El círculo de centro M y radio mE es el círculo inscrito en el triángulo buscado; entonces la base de dicho triángulo se encuentra sobre la tangente desde L' al círculo inscrito.

Una de las tangentes corta a los lados del ángulo respectivamente en A y B , entonces el triángulo ABC es un triángulo solución al enunciado propuesto. La otra tangente proporciona un segundo triángulo solución que tiene los lados intercambiados respecto del anterior.

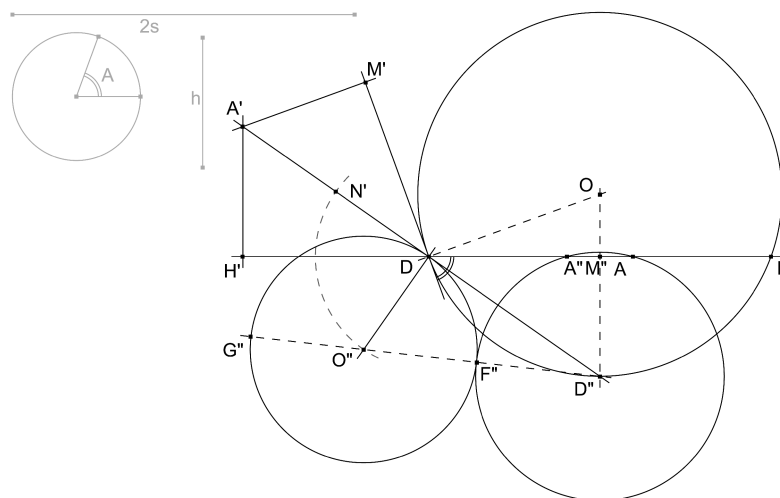
4.11 CONSTRUCCION - JUAN SAPIÑA BORJA.

Hemos visto en el problema de Pappus (3.) Que el problema se resolvía mediante una construcción auxiliar. En este caso usaremos como auxiliar el arranque del problema y construiremos el triángulo buscado sobre la construcción de la solución del problema de Pappus. Tendremos así una realización distinta a la de H. Lez (4.6).



Sea la suma $2s$, la altura h y el ángulo A .

Con vértice en D trazamos el ángulo dado. Tomamos sobre la bisectriz de este ángulo un punto A' que equidiste de los lados las distancias $A'H' = A'M' = h$. Podemos pasar ahora a resolver el problema de Pappus correspondiente.



Sobre la prolongación de $A'H'$ tomamos el punto B tal que $DB = 2s$ y construimos sobre DB el arco capaz del ángulo dado; para ello aprovechamos la bisectriz trazada. La mediatriz de DB corta a la bisectriz en D'' . Trazamos el círculo tangente a DD'' en D de diámetro $A'D$ cuyo centro es O'' . $D''O''$ corta a este círculo en F'' y G'' . Un círculo de centro D'' y radio $D''F''$ corta a DB en A .

**5. PROBLEMAS SIMILARES O RELACIONADOS
CON EL PROBLEMA DE PHILIPPE DE LA HIRE.**

5.1 UNA MISMA FAMILIA DE PROBLEMAS

Hemos visto en un buen número de casos que las mismas ideas y construcciones, que nos llevan a resolver el problema de Philippe De La Hire, nos proporcionan soluciones adicionales en que el triángulo obtenido mantiene la misma altura; pero tiene el ángulo suplementario al ángulo dado y la diferencia de lados de ese ángulo es igual a la magnitud dada como suma en el problema original.

Del análisis realizado por H. Lieber y F. von Lühmann, concluimos que las mismas consideraciones nos llevan a poner de manifiesto la diferencia de los ángulos adyacentes al lado opuesto del ángulo dado en el enunciado original.

CL. Servais también indica el mismo problema cuando, en lugar de la suma o diferencia de lados, conocemos el producto k^2 de los mismos y hemos visto que señala que los métodos vistos corresponden a un tipo de problema general de la forma

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO, CONOCIDO UN ÁNGULO C Y LA ALTURA TRAZADA CH DESDE EL VÉRTICE DE ESE ÁNGULO AL LADO OPUESTO AB , CUANDO LOS OTROS DOS LADOS CA Y CB ESTÁN LIGADOS POR LA RELACIÓN

$$CA \cdot CB + \alpha (CA + CB) + \beta^2 = 0,$$

DONDE α Y β SON LONGITUDES DADAS...

En general, a partir del enunciado original de Philippe De La Hire

(1) $CA + CB, CH, C$

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADOS UN ÁNGULO C , LA ALTURA CH DESDE EL VÉRTICE DE ESE ÁNGULO AL LADO OPUESTO AB Y LA SUMA $CA + CB$ DE LOS LADOS QUE COMPRENDEN EL ÁNGULO DADO.

podemos aprovechar lo visto hasta aquí si conservando el dato de la altura y contemplando dos tipos de variaciones: una en las relaciones de dos de los lados y otra en la relación de los ángulos.

Relación de los lados. Se puede sustituir la suma de lados $CA + CB$ que comprenden al ángulo dado por la diferencia de esos lados $CA - CB$, por el producto $CA \cdot CB$ de los mismos o por su razón $CA : CB$.

Relación de ángulos. Se puede sustituir el ángulo dado por la diferencia $A - B$ de los ángulos adyacentes al lado AB .

Las consideraciones anteriores nos determinan los siguientes enunciados:

(2) $CA - CB, CH, C$

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADOS UN ÁNGULO C , LA ALTURA CH DESDE EL VÉRTICE DE ESE ÁNGULO AL LADO OPUESTO AB Y LA DIFERENCIA $CA - CB$ DE LOS LADOS QUE COMPRENDEN EL ÁNGULO DADO.

(3) $CA \cdot CB, CH, C$

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADOS UN ÁNGULO C , LA ALTURA CH DESDE EL VÉRTICE DE ESE ÁNGULO AL LADO OPUESTO AB Y EL PRODUCTO $CA \cdot CB$ DE LOS LADOS QUE COMPRENDEN EL ÁNGULO DADO.

(4) $CA : CB, CH, C$

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADOS UN ÁNGULO C , LA ALTURA CH DESDE EL VÉRTICE DE ESE ÁNGULO AL LADO OPUESTO AB Y LA RAZÓN $CA : CB$ DE LOS LADOS QUE COMPRENDEN EL ÁNGULO DADO.

(5) $CA + CB, CH, A - B$

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADOS LA DIFERENCIA DE ÁNGULOS $A - B$ ADYACENTES A LA BASE AB , LA ALTURA CH DESDE EL VÉRTICE OPUESTO A ESA BASE Y LA SUMA $CA + CB$ DE LOS LADOS QUE COMPRENDEN EL ÁNGULO DADO.

(6) $CA - CB, CH, A - B$

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADOS LA DIFERENCIA DE ÁNGULOS $A - B$ ADYACENTES A LA BASE AB , LA ALTURA CH DESDE EL VÉRTICE OPUESTO A ESA BASE Y LA DIFERENCIA $CA - CB$ DE LOS LADOS QUE COMPRENDEN EL ÁNGULO DADO.

(7) $CA \cdot CB, CH, A - B$

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADOS LA DIFERENCIA DE ÁNGULOS $A - B$ ADYACENTES A LA BASE AB , LA ALTURA CH DESDE EL VÉRTICE OPUESTO A ESA BASE Y EL PRODUCTO $CA \cdot CB$ DE LOS LADOS QUE COMPRENDEN EL ÁNGULO DADO.

(8) $CA : CB, CH, A - B$

CONSTRUIR UN TRIÁNGULO Y CALCULAR SUS ELEMENTOS DADOS LA DIFERENCIA DE ÁNGULOS $A - B$ ADYACENTES A LA BASE AB , LA ALTURA CH DESDE EL VÉRTICE OPUESTO A ESA BASE Y LA RAZÓN $CA : CB$ DE LOS LADOS QUE COMPRENDEN EL ÁNGULO DADO.

