RICARDO BARROSO CAMPOS

FASES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. EL CASO DE LA GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO.

1. INTRODUCCIÓN.

En este documento trataremos acerca de la resolución de problemas desde el punto de vista del resolutor. ¿Qué es un problema de matemáticas, en este caso de la geometría del triángulo? ¿Qué sucede en la mente cuando una persona resuelve un problema? ¿Porqué motivo van apareciendo cuestiones y posibilidades cuando uno ve las figuras en días sucesivos?

Problema

Según la RAE, la quinta acepción de problema es

“Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.”

Tres visiones

Polya (1957) indica cuatro fases muy conocidas:

1. Entender el problema.
2. Crear un plan.
3. Llevar a cabo el plan.
4. Revisar e interpretar el resultado (mediante el método científico)

Consideramos que la heurística de Polya es correcta y es necesario conocerla y llevarla a la práctica en ocasiones variadas para su comprensión completa.

Mason, Burton y Stacey (1988) señalan:

1: Abordaje.

2: Ataque. ↕

Ajá

3: Revisión o reflexión. . ↕

Quizá nuestra reflexión sobre los dos problemas presentados en este trabajo de investigación sean cercanos a este modelo. Ese Ajá que hace que se vaya de la tercera a la segunda y de la segunda a la tercera fase en un feedback de estos autores consideramos que es fundamental para resolver un problema.

De Guzmán (1994) trata de aspectos psicológicos:

Tener talante inicial apropiado Confianza Tranquilidad Disposición de aprender Curiosidad Gusto por el reto

Para este autor, el miedo a lo desconocido, el nerviosismo y cierta desazón ante la prueba pueden minar seriamente nuestra intervención.

Estamos también cercanos a la posición presentada por De Guzmán.

2 .FUNDAMENTOS

Tenemos publicadas a partir de 1987 más de sesenta soluciones de problemas en diversas revistas internacionales como Crux Mathematicorum (canadiense) (28), Gaceta de la RSME (española) (6), Quadrature (francesa) (1), Epsilon (española) (1), Revista Escolar de la OEI (iberoamericana) (5), Mathematical Reflections (estadounidense) (10), Hyacinthos (griega) (1), Educación Matemática (mejicana) (2), Divulgaciones Matemáticas (venezolana) (1), Math Central (Canadiense) , (1) Thales (española) (4), Gacetilla Matemática (española) (1), La Bisbal (española)

En Crux Mathematicorum (2010, vol 36, 2, p. 108), quizá la mejor revista dedicada a problemas matemáticos tenemos publicada una propuesta de problema en 2010 , el 3520.

Desde el año 2000, año mundial de las Matemáticas, estamos dirigiendo un Laboratorio sobre investigación de la geometría del triángulo según el estudio publicado por la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española “La geometría del triángulo, el software de Geometría Dinámica e Internet: Una integración posible” (Barroso 2010), donde hemos supervisado más de mil quinientos problemas.

Según Barroso y Gavilán (2006):

En la resolución de un problema es importante el proceso seguido en la búsqueda y validación de la solución, puesto que dicha resolución conlleva un aprendizaje de los procesos matemáticos tales como conjeturar, particularizar, generalizar, abstraer, probar, establecer relaciones, tan importantes como el conocer conceptos, algoritmos, relaciones y hechos matemáticos.

Consideramos absolutamente necesario el conocimiento por parte del resolutor de propiedades cercanas al problema, para establecer metafóricamente puentes científicos entre los datos establecidos como premisas en el enunciado del problema y las tesis que se pretenden concluir.

En los dos casos en los que pretendemos mostrar las fases por las que un resolutor puede transcurrir, hacemos una breve digresión acerca de las implicaciones didácticas pertinentes.

Consideramos que nuestra labor de investigación al resolver un problema debe ir acompañada necesariamente de aquellas cuestiones del conocimiento matemático que se han desarrollado a lo largo de la propia resolución para acrecentar y dar un sentido preciso a tal conocimiento mediante la valoración de las relaciones establecidas, los conceptos implicados, los procesos aplicados, a fin de poderlos llevar a la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, lo que en definitiva debe ser el norte y la guía de toda labor en el área de conocimiento de Didáctica de las Matemáticas, es decir, buscaremos en definitiva cuáles son las implicaciones didácticas.

3. PRIMER CASO:

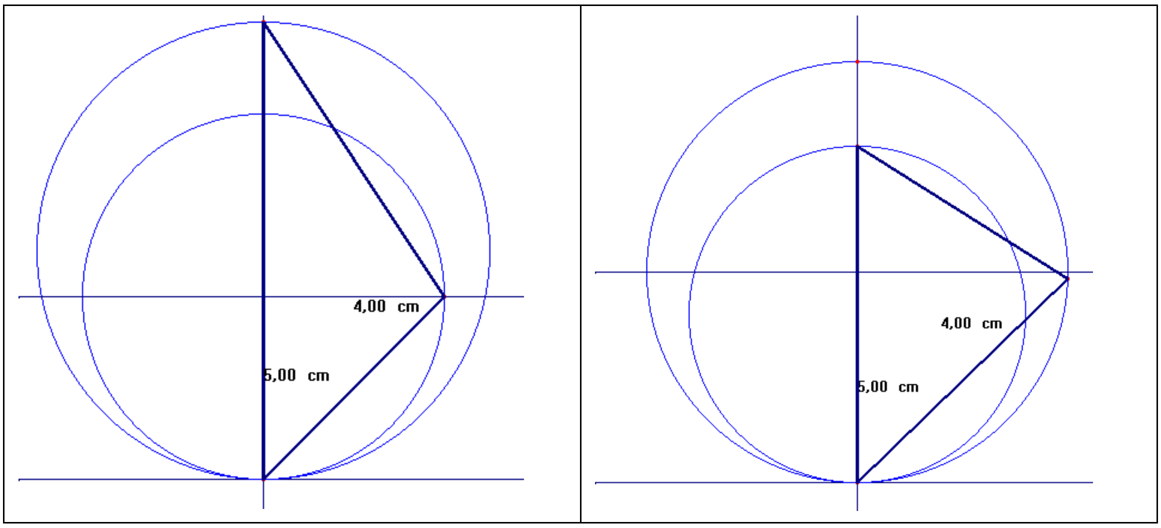
Propuesto por Honsberger (2003)

La circunferencia de radio 4 y centro en A es tangente interiormente en C a la circunferencia de radio 5 y centro en B. D y E son puntos arbitrarios en cada una de ellas, respectivamente. Determinar el área máxima del triángulo CDE.

Primera aproximación: Conjeturas

En una primera aproximación al problema, se hace una reflexión acerca del triángulo de la *presumiblemente* mayor base y altura, tomados sobre un diámetro y un radio perpendiculares. Es nítido que si mantenemos fija la base diametral de 10, el triángulo de mayor área es este cuya altura es el radio 4, por tanto su área es 20, pues cualquier otro tendrá una altura menor que 4.

En el caso alternativo de tener la base del diámetro 8 y la altura del radio 5, también tenemos área 20, y por igual motivo que el anterior manteniendo constante la base cualquier otro tendrá menor altura.



¿Será esa la solución del problema? El hecho de tener el mismo valor ambas situaciones geométricas nos inclina a pensar que sí.

Abordaje analítico.

Tomemos coordenadas con origen en C (0,0) y la recta tangente común como eje de abcisas, el eje de ordenadas será la recta que contiene a los centros de ambas circunferencias.

Así, el punto genérico D tendrá de coordenadas $D(\sqrt{8m-m^2}, m)$ con $0 \le m \le 8$, y E será $E(\sqrt{10t-t^2}, t)$, con $0 \le t \le 10$.

El área de un triángulo mediante coordenadas cartesianas es conocida:

$$S = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{8m-m^2} & m & 1 \\ \sqrt{8t-t^2} & t & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(t\sqrt{8m-m^2} - m\sqrt{8t-t^2})$$

Es decir, una función de dos variables, de la que podemos considerar una de ellas constante, y observar la derivada para tratar de obtener un máximo.

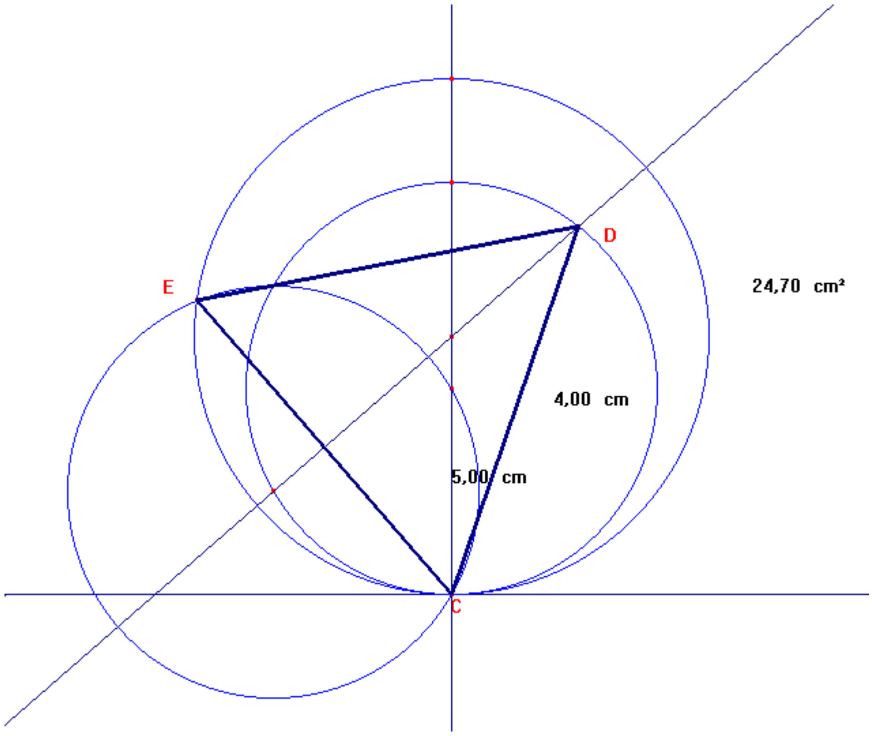
Este abordaje es abandonado al complicarse sobremanera los cálculos.

Es decir la aproximación de Mason, Burton y Stacey la consideramos como carrada en este abordaje. Así pues el resolutor debe ser consciente de la posibilidad de abandonar una determinada estrategia si no ve una manera plausible de encontrar lo buscado.

Pero una cuestión de máximos en geometría nos hace dudar. Nos hace recordar que en la circunferencia el triángulo contenido de mayor área es el equilátero. Intentemos construir un triángulo equilátero que contenga al punto C y se apoye en las dos circunferencias, con un vértice D en una y otro E en otra.

En este momento surge una situación geométrica de matiz claramente cognitivo.

¿Cómo construir tal triángulo? ¿De qué herramientas se pueden disponer para ello? Se trata del giro. Al girar una de las circunferencias 60º alrededor de C, cortará a la otra en E, de modo que E es un punto del equilátero buscado. La mediatriz de EC cortará a la circunferencia que hemos girado en D, y CDE será el que hipotéticamente tiene mayor área.



En efecto el triángulo obtenido es de área mayor que el inicialmente tratado. Lógicamente, este triángulo tiene menor base que los anteriores, 7,55 pero tiene mayor altura, 6,54, y así el área es mayor. Debido a la simetría de la construcción, hay dos triángulos como el obtenido.

Uso de software de geometría dinámica.

Hemos mejorado la hipótesis inicial. El Ajá que señalaban Mason, Burton y Satcey ha sido satisfactorio. ¿Hemos terminado? En Barroso (2008) hacemos una digresión acerca de cómo el software de Geometría dinámica "ayuda" al descubrimiento en geometría.

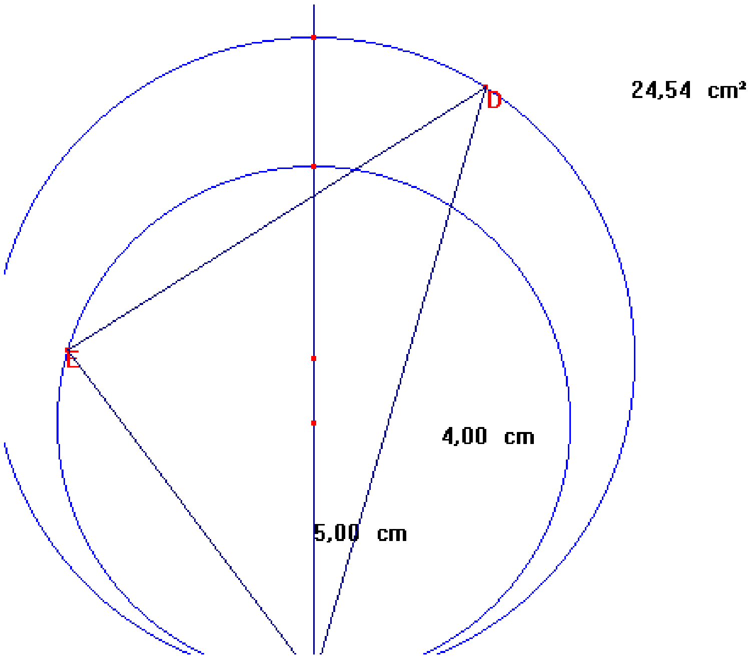
Es una importante observación que nos permitimos señalar, y añadir a las visiones establecidas al comienzo del documento:

El uso convenientemente tratado de software de geometría dinámica permite al resolutor de problemas de geometría tener un soporte para establecer conjeturas.

En nuestro caso, lo hemos usado.

Manteniendo fijo el punto C y desplazando los puntos E y D sobre las circunferencias, hemos buscado la posibilidad de tener un triángulo cuya área fuese mayor que la última hallada, 24,70.

De nuevo un feedback se establece en la mente del resolutor, en este caso con la ayuda del software.



1	25,52
2	25,36
3	25,48
4	25,48
5	22,65
6	23,71
7	24,54
8	25,13
9	25,48
10	25,58
11	25,43
12	25,02
13	24,38
14	23,50
15	22,40
16	21,10
17	19,61
18	17,97
19	16,20

Establecemos una animación, del punto D, manteniendo E y C.

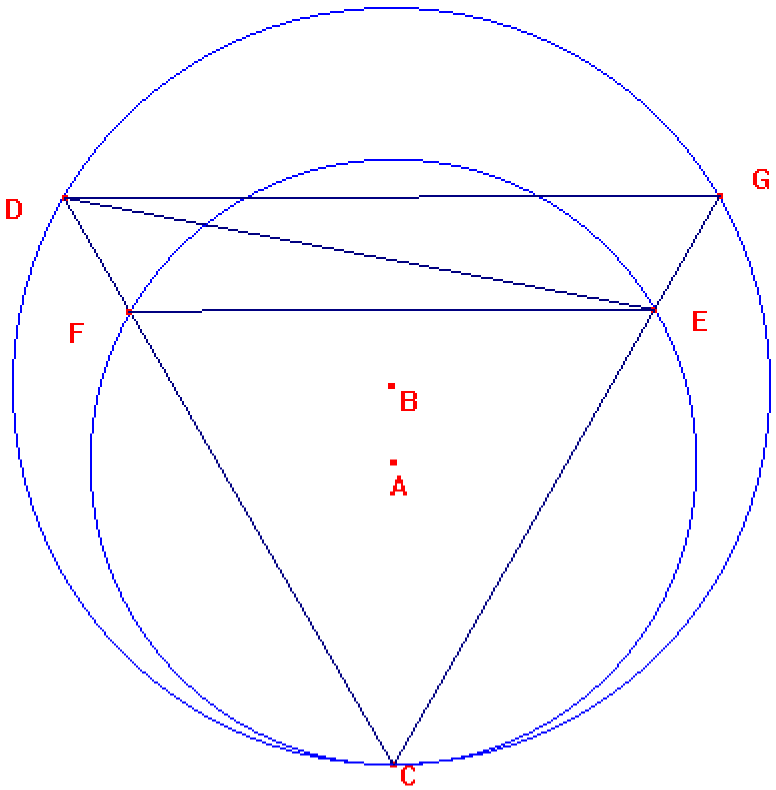
Al tabular valores de áreas, se observa claramente que, por ejemplo al mantener E fijo y D variable hay valores mayores que el 24,70 que habíamos obtenido. En este caso el mayor tabulado es caso 10, 25,58.

Revisión: Consideraciones sobre el máximo.

De nuevo debemos empezar a revisar el razonamiento. Como señala De Guzmán, el gusto por el reto está presente en el resolutor. Es la segunda ocasión que debemos rechazar una hipótesis o conjetura. Ello nos anima a seguir investigando.

Tenemos ahora una leve intuición. El triángulo buscado, ¿podría contener al mayor triángulo construido con el vértice C en la circunferencia de radio 4, y estar contenido en el mayor triángulo construido con el vértice C en la circunferencia de radio 5?

O sea sería un triángulo que contuviese a un equilátero y estuviese contenido en otro equilátero, con un punto común, C. ¿De qué manera se construye tal triángulo? En esta ocasión, se trata de girar 30º el diámetro que pasa por C y obtendremos E en la circunferencia de radio 4. El giro de -30 del mismo diámetro nos dará en su intersección con la otra circunferencia de radio 5 el punto D.



Sea FEC el equilátero contenido en la circunferencia de centro A. Es el triángulo de mayor área que contiene esa circunferencia.

Sea DGC el equilátero contenido en la circunferencia de centro B. Es el de mayor área contenida en ella.

Por tanto el triángulo DEC es el pedido pues incluye a FEC y está contenido en DGC.

Busquemos el área de DEC.

Las coordenadas de C son (0,0).

Las coordenadas de E son:

$(m, \sqrt{3}m)$. Dado que E es un punto de la circunferencia de centro A y radio 4, es:

$(m-0)^2 + (\sqrt{3}m - 4)^2 = 4^2$.

Luego $m = 2\sqrt{3}$, y así $E(2\sqrt{3}, 6)$.

De igual manera se halla $D(\frac{-5\sqrt{3}}{2}, \frac{15}{2})$

Por último es

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2\sqrt{3} & 6 & 1 \\ \frac{-5\sqrt{3}}{2} & \frac{15}{2} & 1 \end{vmatrix}=15\sqrt{3}$$

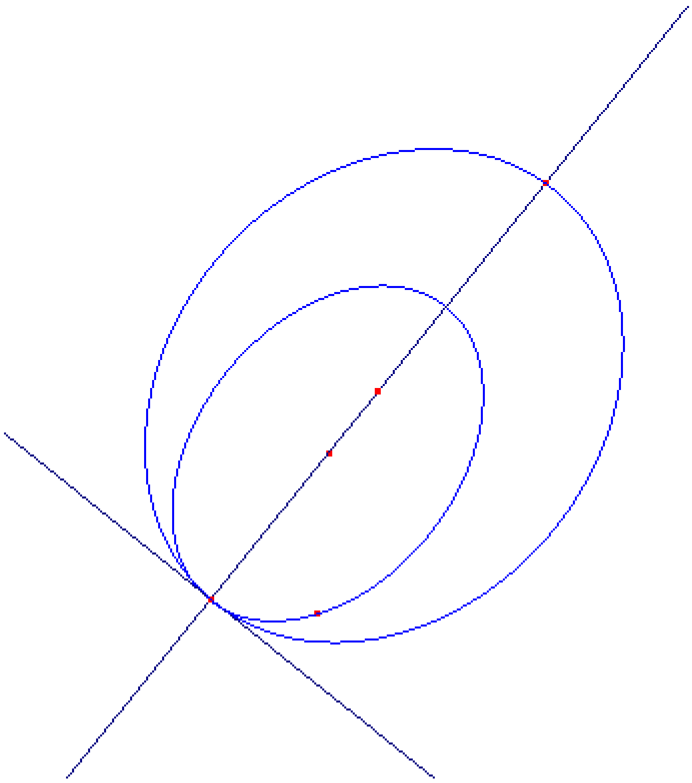
Generalización

Una vez hallada la solución podemos generalizarla,

En el sentido de que los radios sean a y b.

En el sentido de que las circunferencias sean tangentes exteriores.

En el sentido de que las figuras tangentes sean elipses con los ejes mayores sobre la misma recta, o tangentes simplemente.



Se deja al lector interesado el estudio de tales generalizaciones.

Implicaciones didácticas

Podemos obtener implicaciones didácticas, tal y como se han ido observando a lo largo del documento:

Inscripciones de triángulos equiláteros.

Uso del software de geometría dinámica:

- Animación.
- Tabulación.

Búsqueda de máximos.

Área de triángulos desde diversas visiones.

Primera aproximación: Conjeturas
Abordaje analítico.
Uso de software de geometría dinámica
Revisión: Consideraciones sobre el máximo.
Generalización
Implicaciones didácticas

4. SEGUNDO ESTUDIO:

Consideraciones previas

En este segundo caso presentado en este documento de investigación, nos centramos en la Olimpíada Internacional de Matemáticas (IMO). En el ICME de 1996 asistimos a la conferencia del equipo indio que preparó los problemas de aquel año, que se celebró en Mumbai. Jeffrey Grossman, canadiense, propuso el segundo problema. Es de reseñar que Jefrrey Grossman obtuvo una medalla de oro en 1992 y dos de plata en 1990 y 1991 en el IMO.

En http://www.imo-official.org/year_statistics.aspx?year=1996 se observa que el problema número 2 obtuvo una media de 2,031 y sólo 88 calificaciones de 7 que es la máxima, con 178 valoraciones nulas y 124 con una puntuación de 1, del total de 424 participantes de 75 países, de los que Rumanía resultó vencedor

Fue el segundo problema peor puntuado de aquel año, y lo consideramos pertinente para nuestro análisis. Aunque estamos de acuerdo en que la dificultad de un problema es algo inherente al resolutor y no está definitiva y nítidamente adherida al problema en sí, damos estos datos para, de alguna manera, objetivar la enorme dificultad que posee en sí mismo el problema elegido que vamos a “mirar” para seguir fases de su resolución.

Sea P un punto del interior del triángulo ABC tal que:

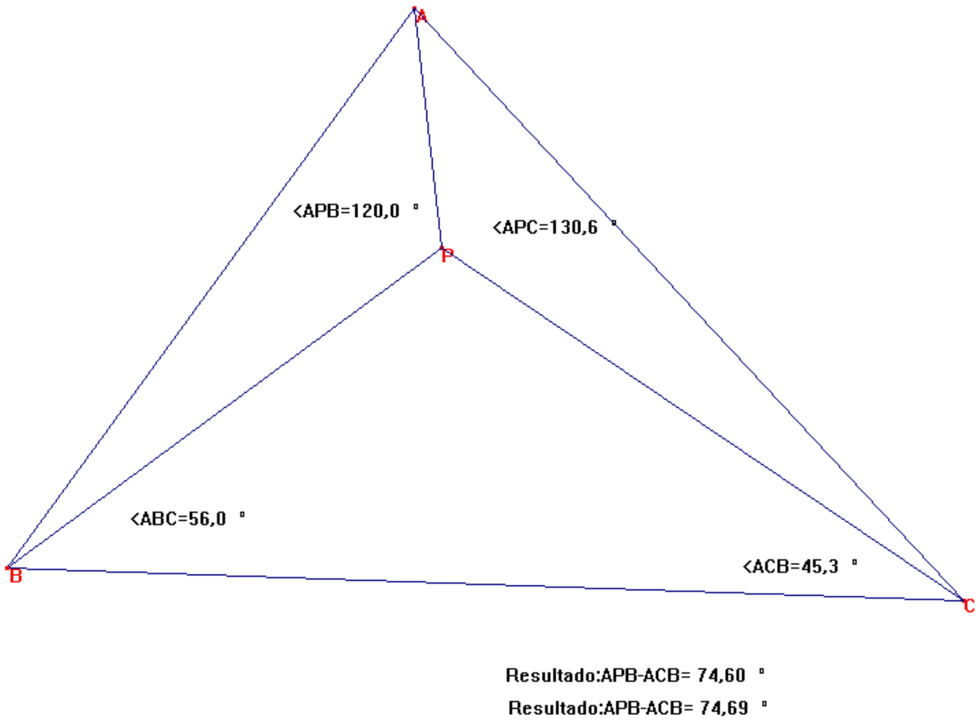
<APB - <ACB = <APC - <ABC.

Sean D y E los incentros de los triángulos APB, APC, respectivamente. Mostrar que AP, BD, CE coinciden en un punto.

Primer acercamiento: Software de geometría dinámica.

Con Cabri II se plantea el problema, y se busca mediante un "arrastre" con el ratón una posición para P.

Es en este caso muy complejo hallar el punto P que cumpla esas condiciones.



Además de complejo nos pareció en este caso algo inútil, que no iba a resolver la situación geométrica planteada ni iba a ayudarnos.

Por tanto esta estrategia inicial de arrastre en software de geometría dinámica la descartamos.

El rehusar una estrategia concreta y no continuar con ella cuando no la vemos es fundamental y crucial para el resolutor. ¿Cuándo debe hacerse tal rechazo? Consideramos que depende del problema en cuestión, de la visión global necesaria y del foco de atención en el que se esté situado.

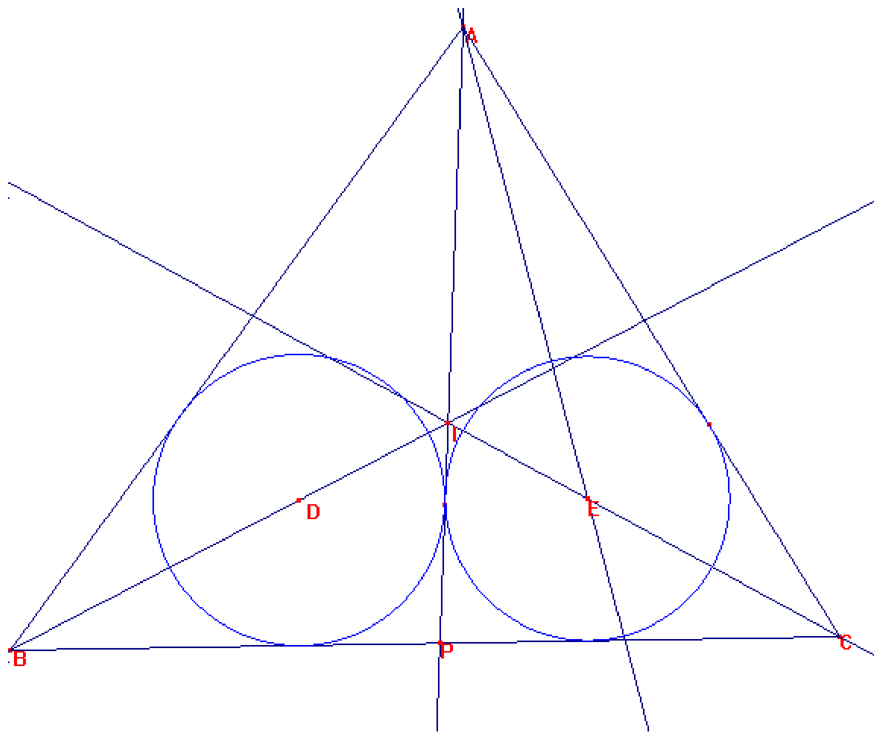
El plan según Polya debemos revisarlo, pues aunque nos aproximáramos a la igualdad, con el arrastre no lograríamos la exactitud requerida por el enunciado.

Segunda aproximación: Particularización para el punto P

Veamos con detalle la igualdad. Si establecemos un cambio de diferencias a sumas, tenemos que debe ser: <APB + <ABC = <APC + <ACB.

Si tomamos el punto P sobre el interior del lado BC, sería:

<APB + <ABC = <APC + <ACB => <APB + <ABP = <APC + <ACP, y por último, debería ser <BAP = <CAP. Es decir que si P es el pie de la bisectriz del ángulo A, se cumple la propiedad. Lógicamente, el punto de intersección de las correspondientes AP BD y CE es el incentro de ABC.



Así pues hemos dado un segundo paso que ahora, como contrapartida del primero, va en sentido positivo; consideramos por ello que se ha avanzado en la resolución del problema.

Tercera aproximación. Una construcción significativa.

El arco capaz se presenta casi con naturalidad en la mente del resolutor. ¿Tendrá efectos positivos?

Volvamos a la expresión inicial.

<APB - <ACB = <APC - <ABC .

Sea w la diferencia establecida en ambas expresiones.

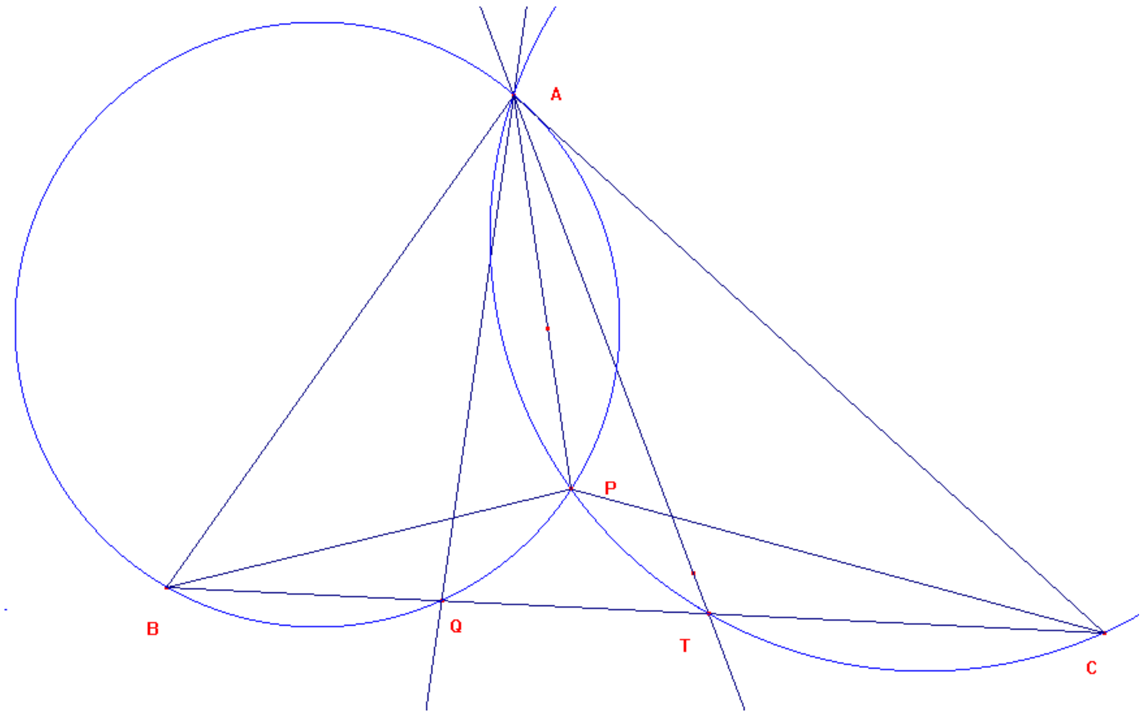
<APB - <ACB = <APC - <ABC. =w.

Es <APB = <ACB +w

<APC = <ABC +w

O sea, los ángulos APB y APC deben tener una estructura peculiar.

Si tomamos desde A un ángulo w < <BAC que corte a BC en T tal que BAT=w, y el mismo valor de forma que corte a BC en Q tal que CAQ=w, y tomamos las circunferencias circunscritas a ATC y a AQB, se cortarán en un punto P que cumple los requisitos establecidos en el problema:



Es <APB=<AQB= <QAC+<ACB=w+<ACB, por ser <AQB ángulo exterior del triángulo AQC y ser igual a la suma de los no adyacentes.

De igual manera,

<APC= <ATC=w+<ABC.

Es decir, hemos conseguido la construcción del punto P solicitado por el enunciado.

El avance del problema es significativo, pues permite la comprensión de la estructura adyacente al enunciado, que es cuestión de suma importancia

Así podemos añadir a las consideraciones establecidas la siguiente:

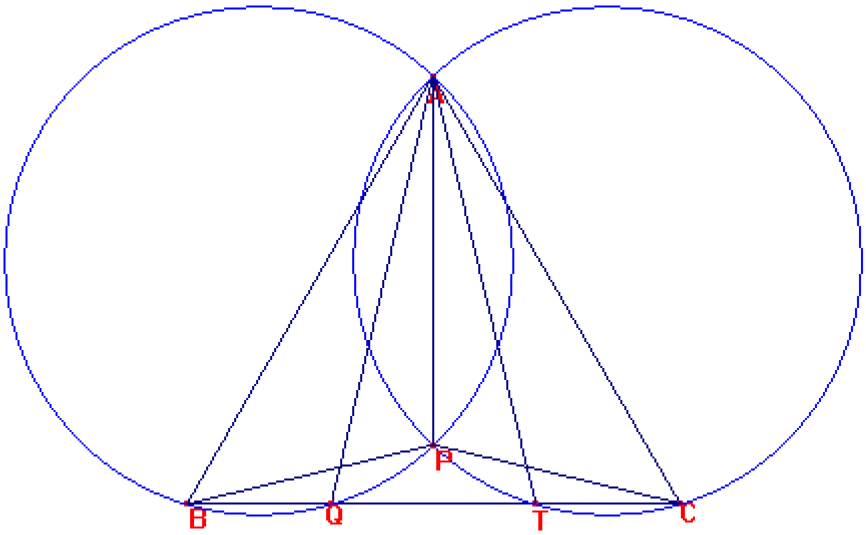
Construir de manera claramente estructurada lo aportado por el enunciado del problema.

Aunque pueda parecer obvia esta observación, es necesario el conocimiento cercano al problema lo que permita realizarla.

Cuarta aproximación: Dos particularizaciones según el tipo de triángulo.

¿Qué sucede con las condiciones del problema para el triángulo regular?

Indaguemos el caso del triángulo equilátero:

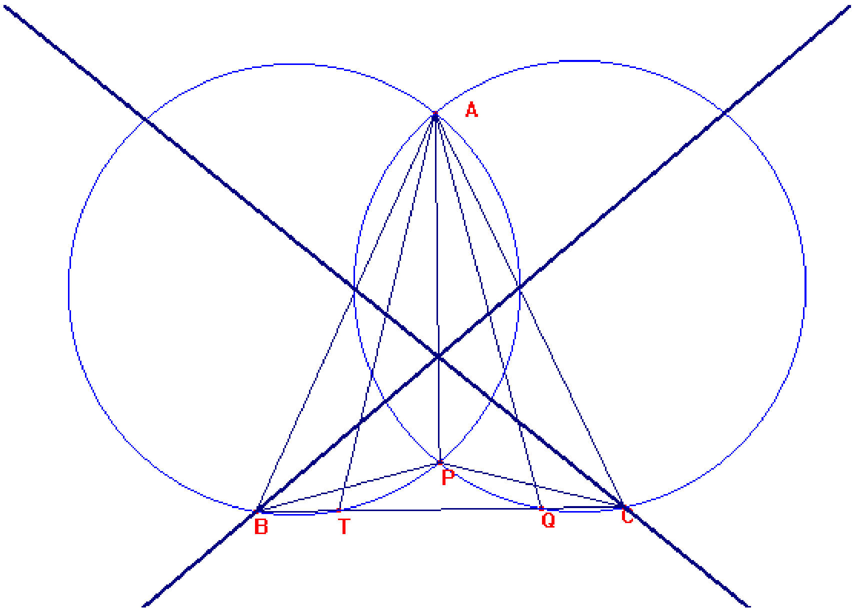


En esta situación geométrica, al ser <AQB=<ATC por simetría, es también <APB=<APC. Dado que AC=AB por ser equilátero, es <PAB=<PAC y así AP es la bisectriz de del ángulo A de ABC, y la mediatriz de BC.

Si consideramos la simetría de los triángulos APB y APC según el eje AP, las bisectrices son elementos transformados en dicha simetría por lo que se verifica la propiedad pedida.

Observemos que para nuestros intereses, el triángulo isósceles verifica casi las mismas simetrías por lo que AP seguirá siendo la bisectriz y mediatriz correspondiente, y los triángulos APB y APC serán simétricos según ella.

Luego también en el caso particular de los triángulos isósceles se verifica lo solicitado:



Solución general.

Continuemos con el desarrollo del problema.

Sean <ABC=β, <BAC=α, y <ACB=γ.

Debemos comprobar que las bisectrices de los ángulos ABP y ACP se cortan en un punto de AP.

La bisectriz del ángulo ACP cortará a AP en T. Según la propiedad de la bisectriz, tenemos: PT/AT= PC/AC

Deberemos confirmar que BT es la bisectriz de ACP, es decir que debemos comprobar que PT/AT= PB/AB, es decir que PC/AC=PB/AB.

O bien AB/AC=PB/PC.

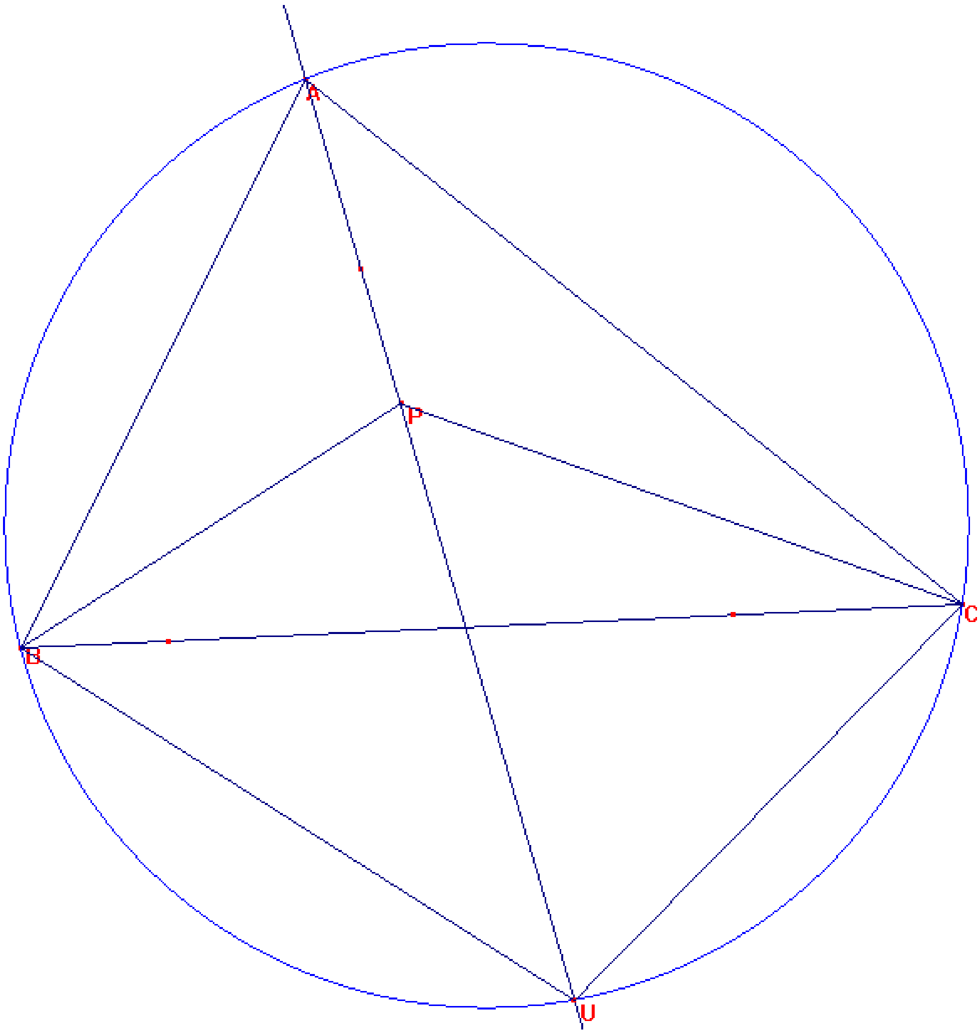
Esta relación de igualdad nos recuerda la ley de los senos.

AB/AC=sen ACB/ sen ABC.

Quizá sea esta estrategia adecuada, en caso de comprobar que

PB/PC= sen ACB/ sen ABC.

Tengamos en cuenta de nuevo una construcción geométrica en la que PB y PC se relacionen con los ángulos ACB y ABC.



Si trazamos la circunferencia circunscrita, AP cortará a la misma en U.

Los triángulos BPU y CPU nos van a servir de ayuda.

Es <PUB=<AUB=<ACB, por lo que <PBU=<APB-<AUB=<APB-<ACB

Por otra parte, es <PUC=<PBC, y de igual manera, <PCU=<APC-<ABC,

Luego <PBU=<PCU

Tenemos, de nuevo por la ley de los senos:

BP/PU= sen PUB / sen PBU, y además CP/PU= sen PUC/ sen PCU, y por ello,

BP/CP= sen PUB / sen PUC = sen ACB / sen ABC.

Consideramos que en hora y media que disponían los olímpicos para resolver este complejo problema, habría que disponer de conocimientos muy consolidados sobre arco capaz, ley de los senos, entre otros, para poder afrontarlo con éxito, de ahí la bajísima calificación entre estudiantes que ya habían traspasado las fronteras nacionales y se encontraban en la última fase de la IMO.

Implicaciones didáctica.:

Utilización de Software de Geometría Dinámica, con rechazo.

Particularización según puntos concretos.

Arco capaz.

Particularización según triángulo equilátero e isósceles.

Circunferencia circunscrita.

Propiedades de la bisectriz.

Ley de los senos en un triángulo.

Primer acercamiento: Software de geometría dinámica.
Segunda aproximación: Particularización para el punto P
Tercera aproximación. Una construcción significativa.
Cuarta aproximación: Dos particularizaciones según el tipo de triángulo.
Solución general.
Implicaciones didácticas.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Estamos en principio de acuerdo, en general, con los tres marcos teóricos señalados al principio del documento.

Añadiríamos algunas cuestiones:

Un entrenamiento que indique con claridad cuándo debe ser rehusado un plan o una estrategia, es decir, cuándo una situación nos lleva a un callejón sin salida.

El uso significativo de los software de geometría dinámica cuando nos aporte visión acerca de las propiedades implicadas, descartándolo en caso de simple arrastre que nos de una sensación de imprecisión.

Captar la esencia de lo que se solicita en el enunciado del problema. Aunque parece obvio, a veces no lo es.

Realizar simplificaciones del problema, con particularización bien de variables presentes, bien de tipos de figuras geométricas implicadas.

Si el problema se trata desde una perspectiva del profesor, este debe ser consciente de las posibles implicaciones didácticas que conlleva. Pensamos que conceptos, relaciones, teoremas, propiedades, … si son debidamente incrustados en el desarrollo de una resolución, y se aplican de manera coordinada en determinado momento del razonamiento, pueden ser asimilados y acomodados (Piaget,1961) en la estructura cognitiva del alumno de mejor manera que si se realiza de manera aislada.

.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barroso R, Gavilán, JM. (2006): Resolución de problemas de geometría, en FLORES, P. y Ruiz, F. y de la Fuente, M : Geometría para el siglo XXI. Edita Federación Española de Profesores de Matemàticas (FESPM) en coedición con Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Col. Matemáticas y entorno, Badajoz.

Barroso, R (2008): Cabri II come rivelatore di scoperte in geometria: discussione di un caso. La Matematica e la sua didattica. (Anno 22, n.1) p. 123-133

Barroso, R. (2010): Problem 3520. Crux Mathematicorum (vol 36, 2, p. 108)

Barroso , R (2010): La geometría del triángulo, el software de Geometría Dinámica e Internet: Una integración posible. La Gaceta de la RSME vol 3. (p. 557-569)

Cabri II. (2010). http://www.cabri.com/es/cabrilog.html

De Guzmán, M.(1884) Para pensar mejor. Pirámide. Madrid.

Honsberger, R. (2003): Mathematical Diamonds. The Mathematical Association of America. Washington. D.C.

http://www.imo-official.org/year_statistics.aspx?year=1996

Mason, J.; Burton, L. y Stacey K. (1988): Pensar matemáticamente. Centro de Publicaciones del MEC- Editorial Labor. Barcelona. LIBRO

Piaget, J. (1961): La formación del símbolo en el niño. Fondo de cultura económica. México

Polya, G. (1957) "How to Solve It", 2nd ed., Princeton University Press,

Autor

Ricardo Barroso Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. España.