Se tienen cuatro puntos A, B, C y D sobre una circunferencia Γ.

Sea K_a el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{BCD}$, K_b el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{ACD}$, K_c el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{ABD}$ y K_d el punto de Lemoine del triángulo $\widehat{ABC}$.

Sea σ la transformación proyectiva del plano, definida por: $\sigma(A) = K_a, \sigma(B) = K_b, \sigma(C) = K_c, \sigma(D) = K_d$. Determinar los puntos fijos y las rectas dobles en tal transformación.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{577}}$.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

Cuadrilátero de Lemoine.

Se tienen cuatro puntos A,B,C y D sobre una circunferencia T.

Sea a el punto de Lemoine del triángulo BCD, b el punto de Lemoine del triángulo ACD, c el punto de Lemoine del triángulo ABD, y d el punto de Lemoine del triángulo ABC.

Sea f la transformación proyectiva del plano, definida por: f(A)=a, f(B)=b, f(C)=c, f(D)=d. Determinar los puntos fijos y las rectas dobles en tal transformación.

http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,606901

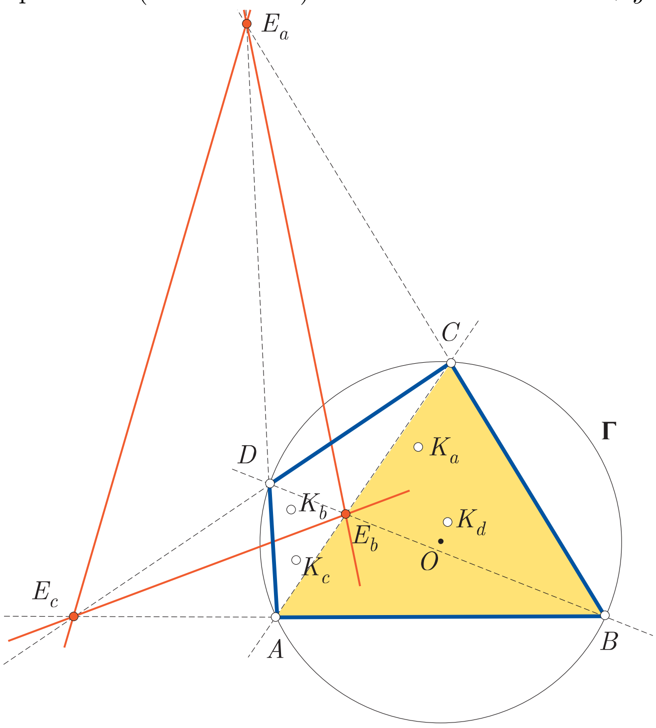
Propuesto por François Rideau, Maitre de Conférences à l'Université de Paris 7.

—— - ——

Para determinar los elementos dobles de la transformación proyectiva en cuestión, podemos determinar la matriz asociada a sus ecuaciones respecto a una referencia proyectiva y luego determinar las raíces de su polinomio característico (§3.2. Geometría proyectiva. Cónicas y cuádricas), que nos permitirá hallar sus puntos y rectas dobles. Como sistema de referencia proyectivo, vamos a tomar $\{A, B, C; G\}$, con puntos base los vértices A, B y C del cuadrilátero dado y punto unidad el baricentro G de estos tres; es decir, un sistema de coordenadas baricéntricas homogéneas respecto al triángulo $\widehat{ABC}$.

En esta referencia, las coordenadas del punto D las podemos poner de la forma $D(a^2(1-d) : b^2d : c^2d(d-1))$, como conjugado isogonal de un punto del $(d : 1-d : -1)$ de la recta del infinito $x + y + z = 0$.

Figura Cabri II Plus



Los simedianos de los triángulos $\widehat{BCD}, \widehat{CDA}$ y $\widehat{DAB}$ son:

$$K_a\left(a^2(1-d) : b^2(1+d) : c^2(d-1)(2d-1)\right),$$

$$K_b\left(a^2(2-d) : b^2d, c^2d(1-2d)\right),$$

$$K_c\left(a^2(d-2)(d-1) : b^2d(1+d) : c^2d(d-1)\right).$$

Sea M es la matriz asociada a la homografía que tiene por pares de puntos homólogos $(A, K_a), (B, K_b), (C, K_c)$ y (D, K_d), $K_d = K(a^2 : b^2 : c^2)$ el simediano de $\widehat{ABC}$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

Debemos resolver el sistema formado por las doce ecuaciones con trece incógnitas, en función de una de éstas:

$$\lambda_a K_a = MA, \quad \lambda_b K_b = MB, \quad \lambda_c K_c = MC, \quad \lambda K = MD.$$

Aquí las letras A, B, C, D, K, K_a, K_b y K_c representan matrices columnas, formadas por las coordenadas de los puntos que ellas representan.

Obteniéndose, como matriz asociada a la homografía buscada:

$$\begin{pmatrix} -a^2b^2c^2(d-1)d^2 & -a^4c^2(d-2)(d-1)^2 & a^4b^2(d-2)(d-1) \\ b^4c^2d^2(d+1) & a^2b^2c^2(d-1)^2d & a^2b^4d(d+1) \\ b^2c^4(d-1)d^2(2d-1) & a^2c^4(d-1)^2d(2d-1) & a^2b^2c^2(d-1)d \end{pmatrix}.$$

Cuyo polinomio característico es:

$$-t^3 + 4a^4b^4c^4(d-1)^2d^2\left(d^2-d+1\right)t + 8a^6b^6(d-1)^4d^4c^6 = 0.$$

Que admite las tres raíces:

$$t_1 = -2a^2b^2c^2d(d-1), \qquad t_2 = -2a^2b^2c^2d(d-1)^2, \qquad t_3 = 2a^2b^2c^2d^2(d-1).$$

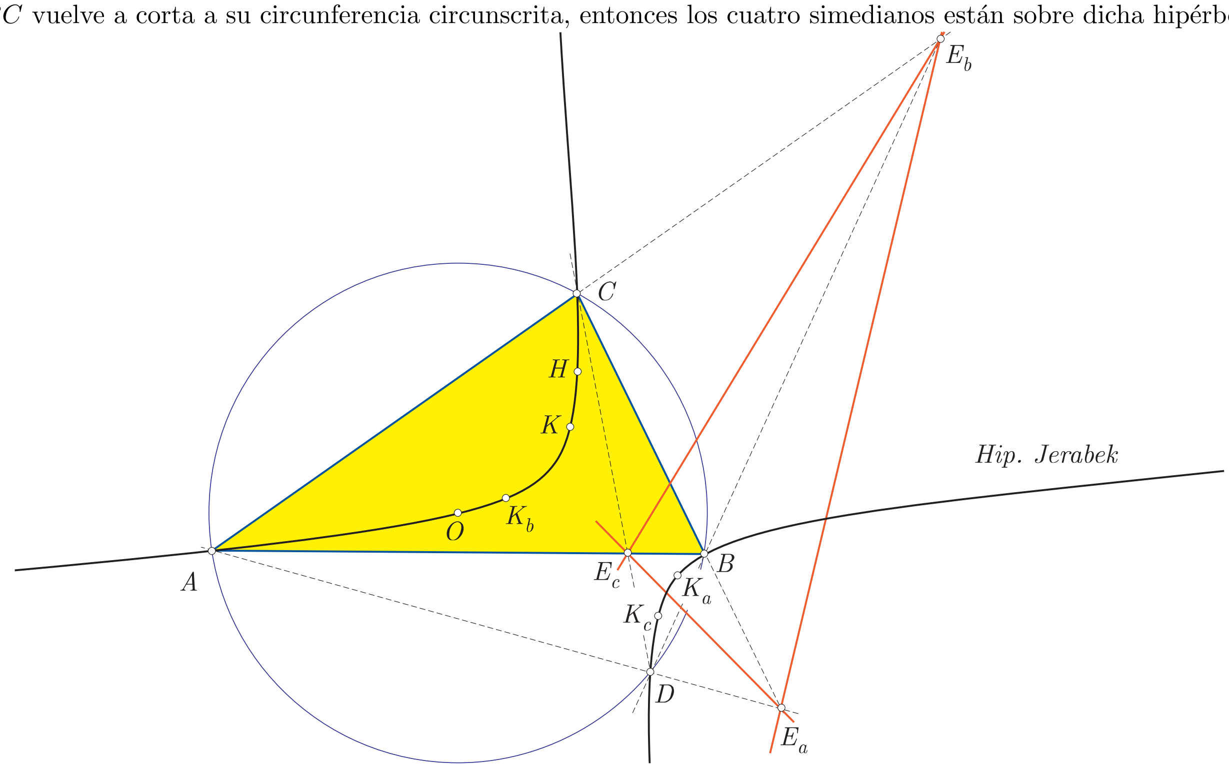
Resolviendo las ecuaciones $(M - t_iI)X = 0$, (I matriz unidad), para $i = 1, 2, 3$, obtenemos los puntos dobles de la homografía:

$$E_a(0 : b^2 : c^2(d-1)), \qquad E_b(a^2 : 0 : -c^2d), \qquad E_c(a^2(1-d) : b^2d : 0).$$

Que son los tres puntos diagonales de cuadrilátero completo A, B, C, D. Las rectas dobles son las tres determinadas por ellos.

Una propiedad:

Si en el cuadrilátero dado tomamos D de tal forma que sea el punto en el que la hipérbola de Jerabek circunscrita a $\widehat{ABC}$ vuelve a corta a su circunferencia circunscrita, entonces los cuatro simedianos están sobre dicha hipérbola.



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2456.pdf