

Problema 578

Se dan en un plano un triángulo ABC y una recta d . Sea $d(t)$ la recta que corresponde a d en una cualquiera de las semejanzas $S(t)$ que cumplen con la condición de que los puntos A', B', C' correspondientes a los puntos A, B y C estén sobre las rectas BC, CA y AB , respectivamente. Hallar la envolvente de las rectas $d(t)$.

Solución de Martin Eduardo Acosta Gempeler profesor de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá/Colombia) (27 de Febrero de 2015)

Plan

Primero voy a demostrar que es posible construir un triángulo $A'B'C'$ rotando un triángulo homotético del triángulo medial.

Luego voy a definir una de las semejanzas como una composición de transformaciones (homotecia, simetría central y rotación)

Finalmente deduciré el lugar geométrico de un punto cuando se aplican todas las semejanzas, y a partir de él la envolvente de una recta cualquiera.

[illegible]

Sean C^*_1 rotación de C^* alrededor de O y A^*_1 rotación de A^* alrededor de O. Por lo tanto, A_1B_1 es perpendicular a OC^*_1 y B_1C_1 es perpendicular a OA^*_1 . Pero A_1B_1 es rotación de AB y B_1C_1 es rotación de BC. Por lo tanto $\angle C^*PA_2 = \angle A^*QC_2$ (con P intersección de AB y $A'B'$, Q intersección de BC y $B'C'$).

Pero los triángulos C^*PA_2 y A^*QC_2 son semejantes por tener dos ángulos iguales. Así que $\frac{C^*A_2}{A_2P} = \frac{A^*C_2}{C_2Q}$. Ahora bien, C^*PA_2 es semejante a $C^*_1A_2O$ (un ángulo recto y el otro compartido), y A^*QC_2 es semejante a $A^*_1C_2O$ (por la misma razón), así que $\frac{C^*A_2}{OC^*} = \frac{A^*C_2}{OA^*}$, lo cual implica que A^*C^* es paralela a A_2C_2 .

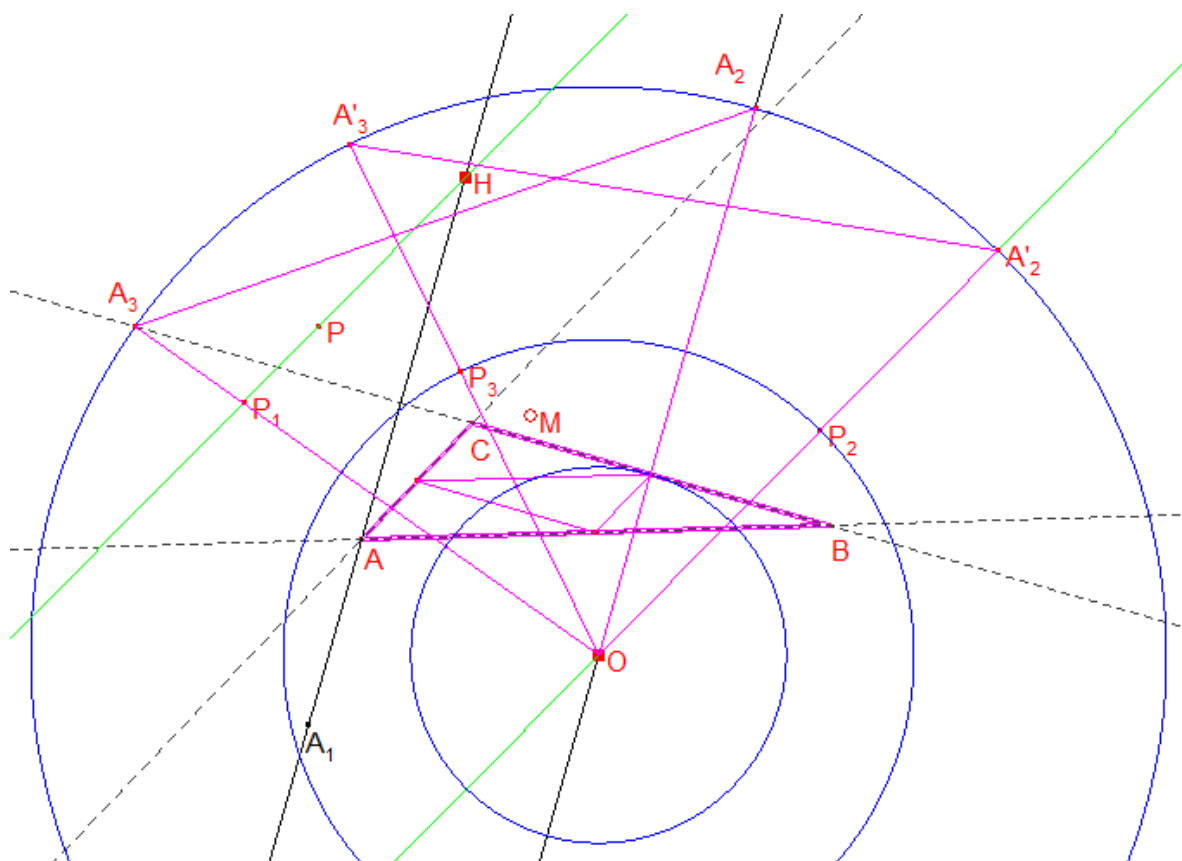
Una demostración análoga puede hacerse para los lados AB y AC , AC y BC . Así que al rotar ABC alrededor de O , los cortes del nuevo triángulo con las mediatrices de ABC forman un triángulo homotético del triángulo medial con respecto a O .

Por lo tanto, si se construye un triángulo homotético del triángulo medial con respecto al circuncentro es posible rotarlo para que sus vértices queden sobre los lados del triángulo ABC . El triángulo así obtenido tiene el mismo ortocentro del triángulo medial, es decir el circuncentro de ABC .

Ahora bien, construir un triángulo homotético del triángulo medial con respecto al circuncentro es equivalente a construir un triángulo homotético del triángulo ABC con respecto al ortocentro y luego hacer la simetría de este con respecto al punto medio del ortocentro y el circuncentro.

De manera que para construir un triángulo $A'B'C'$ semejante a ABC de manera que A' esté sobre BC , B' esté sobre AC y C' esté sobre AB , basta con construir un homotético de ABC con respecto al ortocentro, luego el simétrico de ese con respecto al punto medio del ortocentro y el circuncentro, y finalmente rotarlo para que sus vértices queden sobre los lados de ABC .

Entonces toda semejanza que transforma ABC en $A'B'C'$ es la composición de una homotecia de centro el ortocentro, una simetría de centro el punto medio del ortocentro y el circuncentro, y una rotación de centro el circuncentro.



Sea A_1 homotético de A con respecto a H (ortocentro de ABC), A_2 simétrico de A_1 con respecto a M (punto medio del ortocentro y el circuncentro) y A_3 la intersección del círculo de centro O (circuncentro de ABC) que pasa por A_2 con la recta BC y por lo tanto rotación de A_2 con respecto a O .

Para encontrar la imagen de un punto P por esa semejanza, se construye el punto P_1 homotético de P con respecto a H con razón HA/HA_1 , P_2 simétrico de P_1 con respecto a M y P_3 rotación de P_2 alrededor de O con un ángulo A_2OA_3 .

Ahora bien, construir esta última rotación es equivalente a construir un triángulo P_2OP_3 semejante al triángulo A_2OA_3 . Para lo cual es posible rotar el triángulo A_2OA_3 alrededor de O con un ángulo A_3OP_2 , obteniendo el triángulo $A'_2OA'_3$, y luego aplicar una homotecia al punto A'_3 de centro O y razón OP_2/OA'_2 .

Esta última construcción tiene la ventaja de que el lugar del punto P_2 (cuando A_1 varía) será una recta que pasa por O , y por lo tanto en todas las semejanzas el ángulo A_2OP_2 será el mismo. Por otra parte, la razón OP_2/OA'_2 es constante, puesto que es la misma razón HA_1/HP_1 en todas las semejanzas (los triángulos HA_1P_1 y OA_2P_2 son simétricos con respecto a M , es decir congruentes, y el triángulo HA_1P_1 es homotético del triángulo HAP).

Como el punto A_3 se mueve sobre una recta, su rotación se moverá sobre una recta, y el homotético de este también se moverá sobre una recta. Es decir, el lugar de P_3 será una recta.

Además, como la recta sobre la que se mueve A_3 es perpendicular a la recta OA_2 , el lugar de P_3 es una recta perpendicular a OP_2 .

Si consideramos ahora una recta PQ y su imagen $P'Q'$, ¿qué podemos decir de la envolvente de $P'Q'$? Sabemos que P' recorre una recta y Q' recorre otra recta, y existe una correspondencia homográfica entre ellos (ya que a cada P' le corresponde uno y un solo Q' , y es posible construir uno a partir del otro). Por lo tanto, la recta $P'Q'$ envuelve una cónica. Pero al punto P' del infinito le corresponde el punto Q' del infinito, pues corresponden a la homotecia de razón infinita; así que esa cónica es una parábola. Excepto si la recta PQ pasa por el ortocentro de ABC , en cuyo caso la recta $P'Q'$ siempre pasa por el circuncentro.