Problema 580 de triánguloscabri. *Sean ABC un triángulo de lados $a \geqslant b \geqslant c$, y, D, E y F, los pies de las alturas trazadas desde los vértices A, B, C sobre los lados BC, AC, y AB, respectivamente. Probar que:*

a) $CF - BE \leqslant b - c \leqslant DC - BD$. *Estudiar todas las desigualdades que se obtienen para cada clase de triángulo según los ángulos.*

b) *Si c, C, son lado y ángulo fijo correspondiente y b y a, variables, calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{b\to c} \frac{DC - BD}{CF - BE}$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez

Solución de Francisco Javier García Capitán

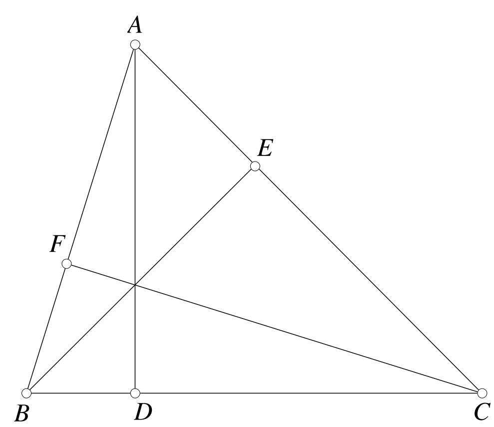

Figura 1

En efecto,

$$CF - BE = \frac{2S}{c} - \frac{2S}{b} = \frac{2S}{b\cdot c}(b-c) = (b-c)\operatorname{sen} A \le b - c,$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si el triángulo es rectángulo en A, o isósceles. Por otro lado,

$$\begin{aligned} DC - BD =& b\cos C - c\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} - \frac{a^2-b^2+c^2}{2a} \\ =& \frac{b^2-c^2}{a} = \frac{b+c}{a}(b-c) \ge b - c, \end{aligned}$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $b = c$.

Si tenemos en cuenta que cuando $b \to c$ es $a \to 2c\cos C$, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{b\to c}\frac{DC-BD}{CF-BE} &= \lim_{b\to c}\frac{(b-c)\frac{b+c}{a}}{(b-c)\operatorname{sen}A} = \lim_{b\to c}\frac{b+c}{a\operatorname{sen}A} = \lim_{b\to c}\frac{c(b+c)}{a^2\operatorname{sen}C}\\ &= \lim_{b\to c}\frac{c(b+c)}{4c^2\cos^2 C\operatorname{sen}C} = \frac{1}{2\cos^2 C\operatorname{sen}C} = \frac{1}{\operatorname{sen}2C\cdot\cos C}.\end{aligned}$$