Dos circunferencias que no se intersecan son tangentes a un ángulo $\widehat{XOY} = \alpha$. Construir un triángulo isósceles $\widehat{PQR}$ con el vértice P sobre OX y la base QR sobre OY, tal que cada uno de sus lados iguales sea tangente a cada una de las circunferencias.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **581**

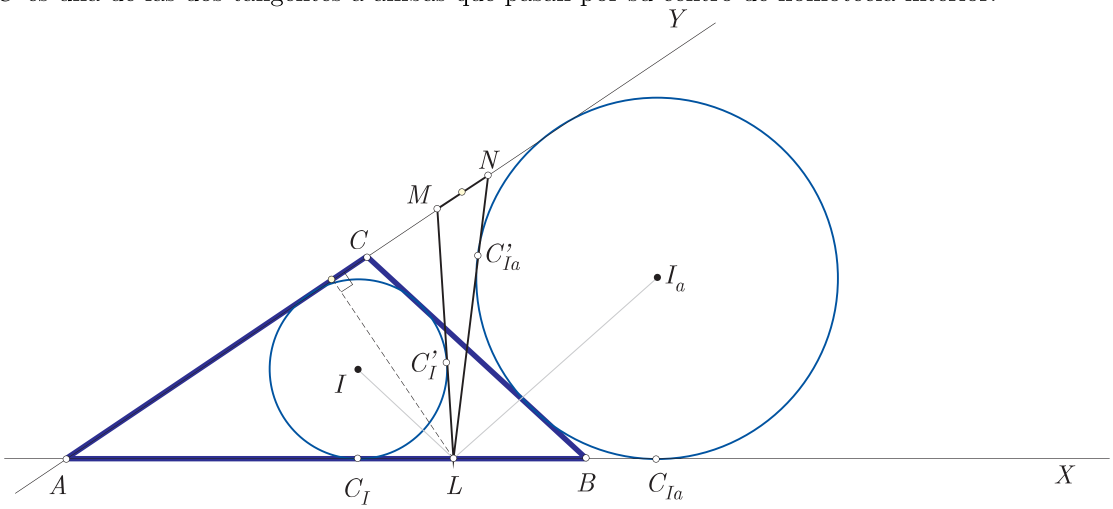
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

> *Dos circunferencias que no intersecan son tangentes a un ángulo agudo $XOY = \alpha$.*
>
> *Construir un triángulo isósceles ABC con el vértice A sobre OX y la base BC sobre OY, tal que cada uno de sus lados iguales sea tangente a cada una de las circunferencias.*
>
> *Honsberger, R. (2003): Mathematical Diamonds. The Mathematical Association of America. Washington. D.C. (p. 68)*

—— - ——

Dadas dos circunferencias que no se cortan ni son tangentes, existen dos triángulos que las tienen como circunferencias inscrita y exinscrita. Sea el triángulo $\widehat{ABC}$ tal que A es el centro exterior de homotecia de las dos circunferencias dadas y BC es una de las dos tangentes a ambas que pasan por su centro de homotecia interior.



Si $L(t : 1-t, 0)$ es un punto variable sobre la recta AB, dado por sus coordenadas baricéntricas relativas al triángulo $\widehat{ABC}$, las tangentes desde L (distintas de AB) a las circunferencias inscrita y A–exinscrita son, respectivamente (http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/gdh.pdf#h-tangentesco):

$$(t-1)(a-b+c-2ct)x + t(a-b+c-2ct)y + (a+b-c)(t-1)tz = 0,$$

$$(t-1)(a+b-c+2ct)x + t(a+b-c+2ct)y + (a-b+c)(t-1)tz = 0.$$

Estas rectas cortan a la recta AC en los puntos:

$$M\big((a+b-c)t : 0 : -a+b+c(2t-1)\big), \qquad N\big((a-b+c)t : 0 : -a-b+c-2ct\big).$$

El triángulo $\widehat{LMN}$ será isósceles (de base MN) si coinciden el punto medio de MN y el pie de la perpendicular trazada desde L a la recta AC. Estos puntos son, respectivamente:

$$\big(t(a^2(t-1)-(b-c)(c(t-1)+b(t+1))) : 0 : -a^2(t-1)-b^2(t+1)-c^2(2t^2-3t-1)-2bc(t^2+t-1)\big),$$

$$\big(a^2(t-1)-c^2(t-1)-b^2(t+1) : 0 : (b^2+c^2-a^2)(t-1)\big).$$

Para que estos dos puntos coincidan, t debe tomar los valores:

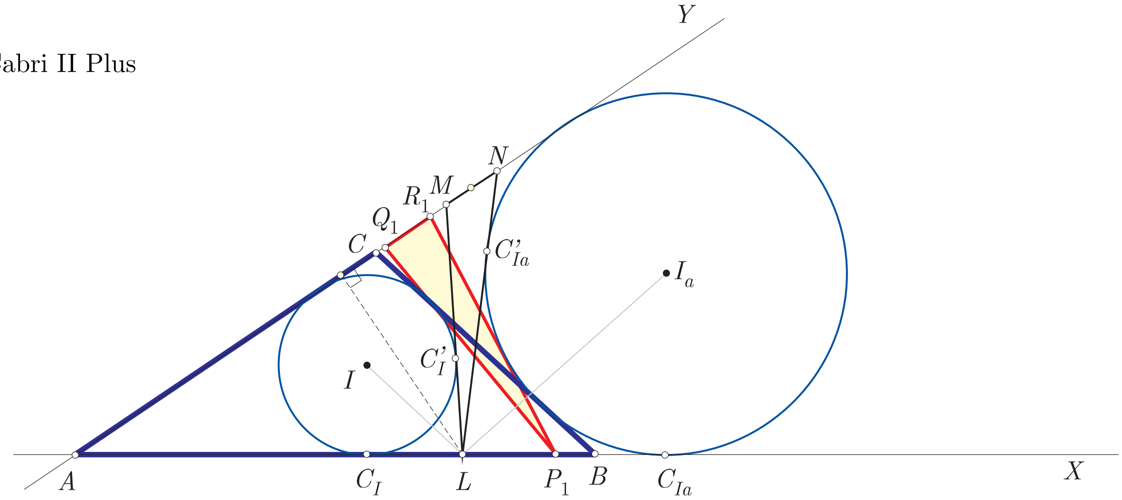
$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2-c^2-2bc}, \qquad \frac{a^2+bc-c^2 \pm b\sqrt{2a^2-b^2-c^2+2bc}}{a^2-b^2-c^2}.$$

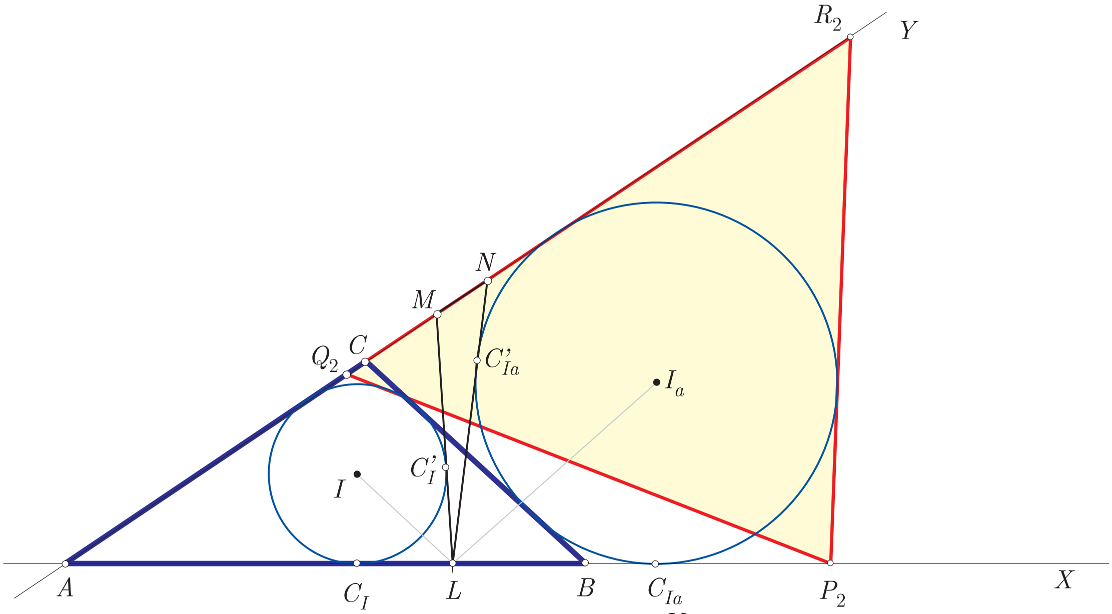
Por consiguiente, al ser $2a^2 - b^2 - c^2 + 2bc = a^2 + 2bc(1 - \cos A) \geq 0$, existen tres puntos en la recta AB (OX del enunciado), que son vértices de triángulos isósceles, soluciones al problema planteado y que se pueden construir con regla y compás. Estos puntos dividen al segmento AB en las razones:

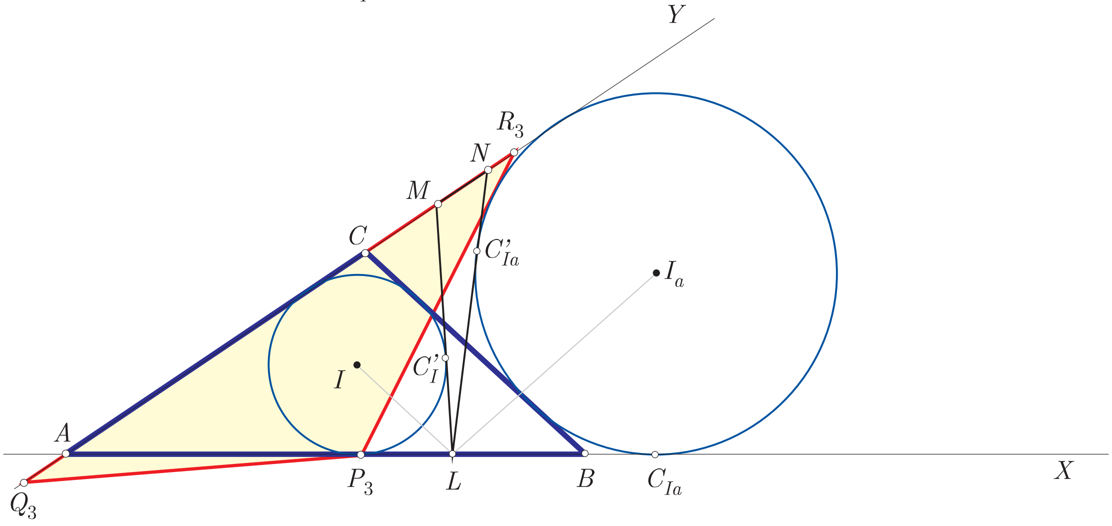
$$-\frac{2b(b+c)}{a^2+b^2-c^2}, \qquad -\frac{b(b+c\pm\sqrt{2a^2-(b-c)^2})}{a^2+bc-c^2\pm b\sqrt{2a^2-(b-c)^2}}.$$

Usando el "hexyl triangle" podremos construir el vértice del triángulo isósceles correspondiente al primero de estos casos (ver el ANEXO).

Fig. Cabri II Plus







A N E X O:

Para una de las soluciones anteriores, el triángulo isósceles hallado $\widehat{P_1Q_1R_1}$, tiene por vértice en la cúspide P_1, que denotamos a partir de ahora por C_a:

$$C_a\left(a^2+b^2-c^2 : -2b(b+c) : 0\right).$$

Si en el enunciado inicial, intercambiamos el lado OX del ángulo α con el lado OY, uno de los triángulos isósceles con base en OX y vértice en OY y tal que cada uno de los lados iguales sea tangente a una de las circunferencias dadas, tiene por vértice en $OY \equiv AC$, el simétrico de C_a, respecto a la bisectriz interior por A:

$$B_a\left(a^2-b^2+c^2 : 0 : -2c(b+c)\right).$$

Procediendo cíclicamente sobre los vértices y lados del triángulo $\widehat{ABC}$ y las circunferencias exinscritas, obtenemos otros pares de puntos:

$$A_b\left(0 : -a^2+b^2+c^2 : -2c(a+c)\right), \quad C_b\left(-2a(a+c) : a^2+b^2-c^2 : 0\right),$$

$$B_c\left(-2a(a+b) : 0 : a^2-b^2+c^2\right), \quad A_c\left(0 : -2b(a+b) : -a^2+b^2+c^2\right).$$

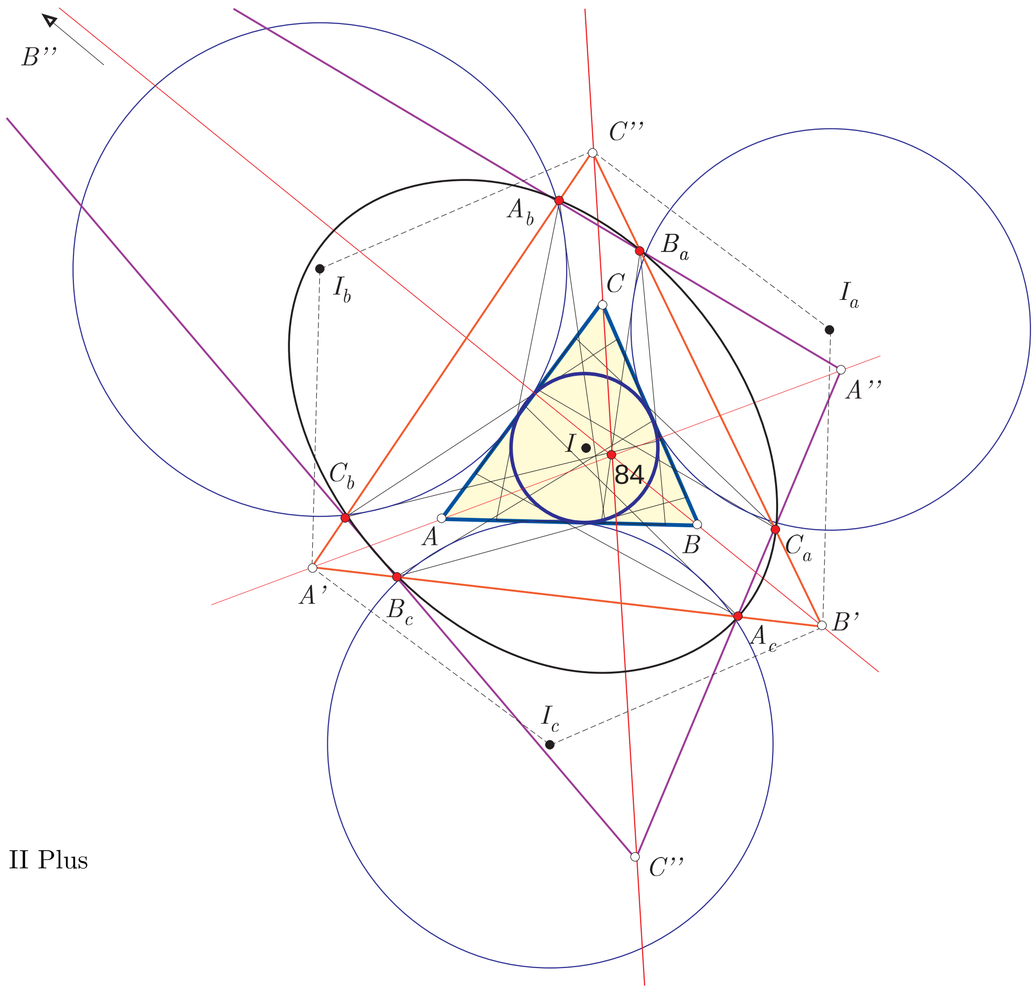


Fig. Cabri II Plus

• Las rectas C_aB_a, A_bC_b y B_cA_c forman el "Hexyl Triangle"[(1)] (http://mathworld.wolfram.com/HexylTriangle.html) de vértices:

$$A' = A_bC_b \cap B_cA_c\left(*** : \frac{b}{c^3+a^3-b^3-(b-c)(b-a)(c+a)} : \frac{c}{a^3+b^3-c^3-(c-a)(c-b)(a+b)}\right),$$

$$B' = C_aB_a \cap B_cA_c\left(\frac{a}{b^3+c^3-a^3-(a-b)(a-c)(b+c)} : *** : \frac{c}{a^3+b^3-c^3-(c-a)(c-b)(a+b)}\right),$$

(1) El "hexyl triangle" de un triángulo dado $\widehat{ABC}$ está definido de la siguiente forma: su vértice A' es la intersección de la perpendicular desde el I_b, centro de la circunferencia B–exinscrita, al lado AB con la perpendicular desde el I_c, centro de la circunferencia C–exinscrita, al lado AC. Los vértices B' y C' se determinan de manera similar.

$$C' = C_aB_a \cap A_bC_b \left(\frac{a}{b^3+c^3-a^3-(a-b)(a-c)(b+c)} : \frac{b}{c^3+a^3-b^3-(b-c)(b-a)(c+a)} : *** \right).$$

Por lo que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son perspectivos, con centro de perspectividad en el punto X_{84} de la Enciclopedia de Kimberling:

$$\left(\frac{a}{b^3+c^3-a^3-(a-b)(a-c)(b+c)} : \frac{b}{c^3+a^3-b^3-(b-c)(b-a)(c+a)} : \frac{c}{a^3+b^3-c^3-(c-a)(c-b)(a+b)} \right).$$

• Como una propiedad relativa a seis puntos en una cónica, las rectas B_aA_b, C_bB_c y A_cC_a determinan un triángulo $\widehat{A''B''C''}$, perspectivo con $\widehat{A'B'C'}$. Además, en este caso, se tiene que $A'' = C_bB_c \cap A_cC_a$ está en AA', $B'' = B_aA_b \cap A_cC_a$ está en BB' y $C'' = B_aA_b \cap C_bB_c$ está en CC'.

• Los puntos C_a, B_a, A_bC_b, B_c y A_c están en una misma cónica, de ecuación:

$$\begin{gathered} 2bc(b+c)x^2 + 2ac(a+c)y^2 + 2ab(a+b)z^2 + \\ \frac{a(a^4+b^4+c^4-2a^2(b-c)^2+4abc(b+c)+6b^2c^2)}{b^2+c^2-a^2}yz + \\ \frac{b(a^4+b^4+c^4-2b^2(c-a)^2+4abc(c+a)+6c^2a^2)}{c^2+a^2-b^2}zx + \\ \frac{c(a^4+b^4+c^4-2c^2(a-b)^2+4abc(a+b)+6a^2b^2)}{a^2+b^2-c^2}xy = 0. \end{gathered}$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2459.pdf