Problema 582.

Dedicado por Ercole Suppa a su maestro y amigo Italo D'Ignazio.

El triángulo T que es tangente externamente a las excircunferencias es denominado triángulo extangencial. Demostrar que:

(1) T es homotético al triángulo órtico, y hallar el centro de homotecia.

(2) El área de T es

$$\Delta' = \frac{\left[\left(a^3+b^3+c^3\right)-(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2 \sec A \sec B \sec C}{8a^2b^2c^2}$$

donde Δ es el área de ABC.

(3) El incentro I_T coincide con el circuncentro C_J del triángulo $I_aI_bI_c$ donde I_a, I_b y I_c son los excentros de ABC.

(4) El radio r_T de la circunferencia inscrita de T es $r_T = 2R + r$ siendo R y r el circunradio y el inradio de ABC, respectivamente.

http://mathworld.wolfram.com/ExtangentsTriangle.html

Soluzione di Ercole Suppa.

Utilizziamo coordinate baricentriche omogenee rispetto al triangolo $\triangle ABC$. I calcoli sono svolti con il programma Mathematica mediante le routines contenute nel pacchetto `baricentricas.nb`, prelevabile dal sito di Francisco Javier García Capitán [1].

```
<< baricentricas`;
<< CoordenadasETC`;
<< NombresETC`;
```

(1) Indichiamo con L_A la tangente esterna comune alle circonfereze $(I_b), (I_c)$, con L_B la tangente esterna comune alle circonfereze $(I_a), (I_c)$, con L_C la tangente esterna comune alle circonfereze $(I_a), (I_b)$:

```
ptX = Punto[Recta[ptIb, ptIc], rtBC]
{0, b, -c}

rtLA = TangenteConicaPuntoExterior[ptX,
   Circunferencia[ptIc, CuadradoDistanciaPuntoRecta[ptIc, rtBC]]][[1]]
{-b c, -c (b + c), -b (b + c)}

{rtLB, rtLC} = Map[PermutarTerna[#] &, {rtLA, rtLB}];
```

Calcoliamo le coordinate baricentriche dei vertici del triangolo extangenziale $A_1 = L_B \cap L_C$, $B_1 = L_A \cap L_C$, $C_1 = L_A \cap L_B$:

```
ptA1 = Punto[rtLB, rtLC]
{-a^2 (a + b + c), b (a + b - c) (a + c), (a + b) c (a - b + c)}

{ptB1, ptC1} = Map[PermutarTerna[#] &, {ptA1, ptB1}]
{{a (a + b - c) (b + c), -b^2 (a + b + c), (a + b) c (-a + b + c)},
 {a (a - b + c) (b + c), b (a + c) (-a + b + c), -c^2 (a + b + c)}}
```

Per verificare che il triangoli $A_1B_1C_1$ ed il triangolo ortico $H_aH_bH_c$ sono omotetici definiamo la funzione:

```
SonHomoteticos[{ptA1_, ptB1_, ptC1_}, {ptA2_, ptB2_, ptC2_}] :=
 And[SonParalelas[Recta[ptB1, ptC1], Recta[ptB2, ptC2]],
  SonParalelas[Recta[ptA1, ptC1], Recta[ptA2, ptC2]],
  SonParalelas[Recta[ptA1, ptB1], Recta[ptA2, ptB2]]]
```

[1] http://garciacapitan.auna.com/baricentricas/

```
SonHomoteticos[{ptA1, ptB1, ptC1}, TrianguloPedal[ptH]]
True
```

Calcoliamo il centro di omotetia:

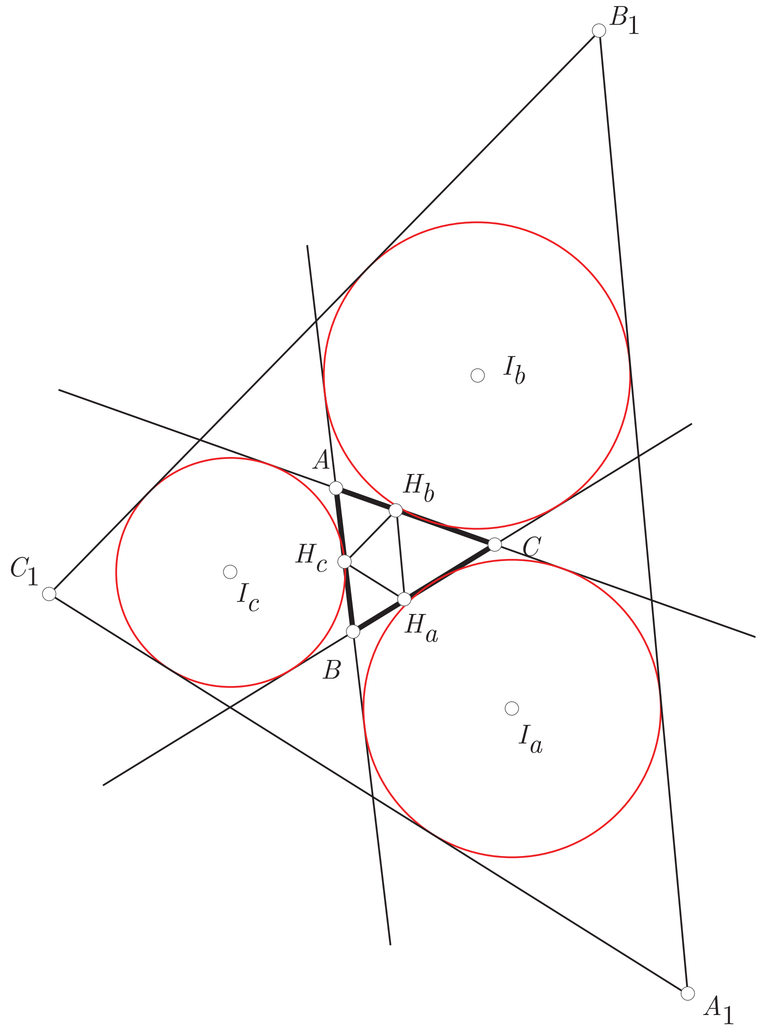
```
ptU = Perspector[{ptA1, ptB1, ptC1}, TrianguloPedal[ptH]]
```

$$\left\{a\left(a^4-\left(b^2-c^2\right)^2\right),\ b\left(-a^4+b^4+2a^2c^2-c^4\right),\ c\left(-a^4+2a^2b^2-b^4+c^4\right)\right\}$$

Cerchiamo il punto U nell'enciclopedia di Kimberling [2], per vedere se si tratta di un punto conosciuto.

```
BuscarPunto[ptU]
The perspector is X19
Name[X[19]]
Clawson point
```

Abbiamo trovato, pertanto, che il centro di omotetia tra $A_1B_1C_1$ ed il triangolo ortico $H_aH_bH_c$ coincide X_{19}, chiamato *punto di Clawson* del triangolo ABC.



[2] http:http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

(2) Calcoliamo l'area di $A_1B_1C_1$:

```
Factor[AreaTriangulo[{ptA1, ptB1, ptC1}]]
```

$$-\frac{\left(a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 - a^2 c - 2 a b c - b^2 c - a c^2 - b c^2 + c^3\right)^2}{\left(-a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(-a^2 + b^2 + c^2\right)}$$

Tenuto conto del teorema del coseno e dell'identità

$$a^3 + b^3 + c^3 - (a+b)(b+c)(c+a) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - a^2c - 2abc - b^2c - ac^2 - bc^2 + c^3$$

abbiamo[3] :

$$\Delta' = \frac{\left[a^3 + b^3 + c^3 - (a+b)(b+c)(c+a)\right]^2}{8a^2b^2c^2 \cos A \cos B \cos C}\Delta = \frac{\left[a^3 + b^3 + c^3 - (a+b)(b+c)(c+a)\right]^2 \sec A \sec B \sec C}{8a^2b^2c^2}\Delta$$

(3) Verifichiamo che l'incentro di $A_1B_1C_1$ ed il circuncentro di $I_aI_bI_c$ coincidono:

```
ptJ = Incentro[{ptA1, ptB1, ptC1}]
```

$$\left\{a\left(a^3 + a^2 (b+c) - (b-c)^2 (b+c) - a (b+c)^2\right),\right.$$
$$\left. b\left(-a^3 + a (b-c)^2 + a^2 (-b+c) + (b-c)(b+c)^2\right),\ c\left(-a^3 + a^2 (b-c) + a (b-c)^2 - (b-c)(b+c)^2\right)\right\}$$

```
Circuncentro[{ptIa, ptIb, ptIc}]
```

$$\left\{a\left(-a^3 - a^2 (b+c) + (b-c)^2 (b+c) + a (b+c)^2\right),\right.$$
$$\left. b\left(a^3 + a^2 (b-c) - a (b-c)^2 - (b-c)(b+c)^2\right),\ c\left(a^3 - a (b-c)^2 + a^2 (-b+c) + (b-c)(b+c)^2\right)\right\}$$

(4) Calcoliamo il raggio della circonferenza inscritta in $A_1B_1C_1$:

```
r2 = CuadradoDistancia[ptJ, Pie[ptJ, rtLA]]
```

$$-\frac{\left(a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3 - a^2 c - 2 a b c - b^2 c - a c^2 - b c^2 + c^3\right)^2}{4(-a+b-c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}$$

Poichè la formula ottenuta è simmetrica rispetto alle variabili a, b, c, il raggio r_T può essere scritto in funzione dei polinomi simmetrici elemetari $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$, $\sigma_3 = abc$. Successivamente, grazie alle note identità $a+b+c = 2p$, $ab+bc+ca = p^2+r^2+4Rr$, $abc = 4Rrp$, il raggio r_T può essere scritto in funzione di p, R, r (con p, R, r abbiamo indicato il semiperimetro, il raggio della circonferenza circonscritta ed il raggio della circonferenza inscritta, rispettivamente).

Per automatizzare questo procedimento, definiamo la funzione TransformarCociente[ ] che trasforma un'espressione un'espressione razionale, simmetrica rispetto alle variabili a, b, c, in un'espressione equivalente nelle variabili p, R, r:

```
Transformar[expr_] := Factor[SymmetricReduction[
    expr, {a, b, c}, {2 p, p^2 + r^2 + 4 R r, 4 R r p}][[1]]]

TransformarCociente[expr_] := Factor[
  Transformar[Numerator[expr]] / Transformar[Denominator[expr]]]
```

Applicando la funzione TransformarCociente[ ] all'espressione che rappresenta il raggio r_T otteniamo

```
TransformarCociente[CuadradoDistancia[ptJ, Pie[ptJ, rtLA]]]
```

$(r + 2 R)^2$

Pertanto $r_T = 2R + r$. □

[3] La funzione AreaTriangulo[P,Q,R] calcola l'area del triangolo PQR, assumendo uguale ad 1 l'area del triangolo di riferimento ABC