
Problema 587
por César Beade Franco

■ **Enunciado**

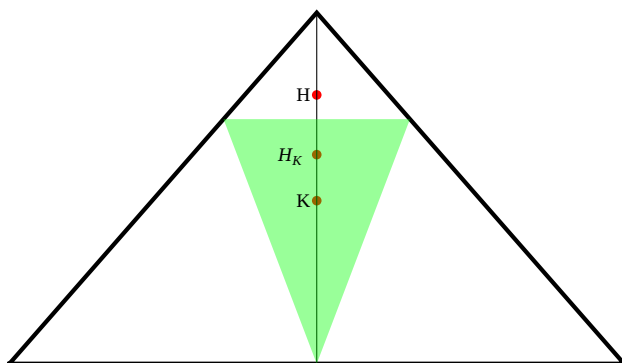
- A. El ortocentro de un triángulo isósceles, su punto simediano y el ortocentro de su triángulo pedal, están alineados.
- B. La recta de van Aubel es la recta que conecta el ortocentro H, el punto simediano K de un triángulo, y el punto simediano J del triángulo órtico.

■ **Solución**

A. Dado un triángulo isósceles con $b=c$, la altura desde A (h_a) es a la vez mediana, mediatriz y bisectriz por lo que el punto de Lemoine K está sobre ella, así como el circuncentro, conjugado isogonal del ortocentro. Además será también una altura del triángulo pedal de cualquier punto P sobre ella, lo que implica que también contendrá al ortocentro de ese triángulo pedal. Esto contesta el problema de Casey que sospecho pensaba en otra cosa.

De hecho se da la alineación de H, K y el ortocentro del triángulo pedal de cualquier punto situado sobre h_a . Y aún podemos preguntarnos ¿de qué triángulo pedal es ortocentro K?

Out[258]=



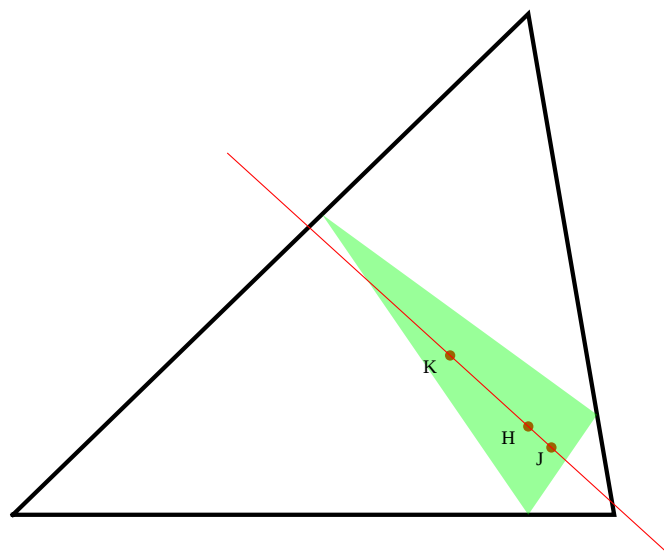
- B. Dado un triángulo T0 (1) cualquiera su ortocentro viene dado por $H = (a, \frac{a-a^2}{b})$ y su punto simediano (de Lemoine) por $K = (\frac{a+a^2+b^2}{2(1+(-1+a)a+b^2)}, \frac{b}{2(1+(-1+a)a+b^2)})$.

Pasemos a calcular J. El triángulo órtico tiene como vértices $A' = \left(\frac{b^2}{(-1+a)^2+b^2}, \frac{b-ab}{(-1+a)^2+b^2} \right)$, $B' = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2} \right)$, $C' = (a, 0)$. El punto simedianal de este triángulo es

$$J = \left(\frac{a(-a^4+a^5+b^4+ab^4+a^2(1-2b^2)+a^3(-1+2b^2))}{2(-3a^5+a^6+b^4+2a^4(2+b^2)-a^3(3+4b^2)-a(b^2+b^4)+a^2(1+3b^2+b^4))}, \frac{(-1+a)ab(-a+a^2-b^2)}{2(-3a^5+a^6+b^4+2a^4(2+b^2)-a^3(3+4b^2)-a(b^2+b^4)+a^2(1+3b^2+b^4))} \right).$$

Para determinar la alineación de H, K y J basta comprobar la anulación del determinante $\text{Det}(K-H, J-H)$, lo que efectivamente sucede.

Out[255]=



■ Notas

(1) Es decir, de vértices $A(a,b)$, $B(0,0)$ y $C(1,0)$.