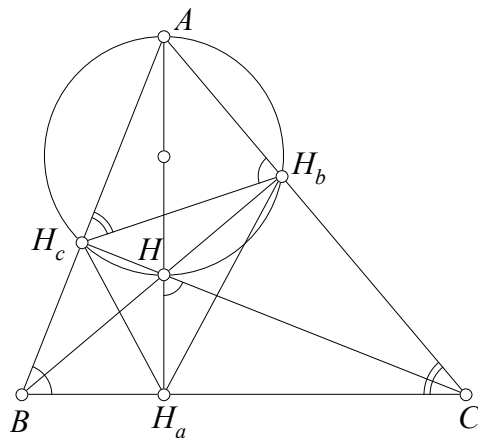


Problema 588 de triángulos cabri. Dado el triángulo acutángulo ABC , sean H_a , H_b , H_c los pies de las alturas trazadas desde los vertices A , B , C respectivamente. Si denotamos por r , t_a , t_b , t_c los inradios de los triángulos ABC , H_bAH_c , H_aH_cB y H_aCH_b demostrar que

$$r < t_a + t_b + t_c \leq \frac{3r}{2}.$$

Propuesto por Ercole Suppa.

Solución de Francisco Javier García Capitán.



Por ser cíclico el cuadrilátero cAH_bHH_c , tenemos

$$\angle AH_bH_c = \angle AHH_c = \angle H_aHH_c = \angle B.$$

De la misma forma, es $\angle AH_cH_b = \angle C$ y así los triángulos AH_bH_c y ABC son semejantes. La razón de semejanza es $AH_b/AB = \cos A$. Por tanto, tenemos $t_a = r \cos A$ y podemos calcular la expresión

$$\lambda = \frac{t_a + t_b + t_c}{r} = \cos A + \cos B + \cos C \stackrel{(1)}{=} \frac{R + r}{R}.$$

Es obvio que $\lambda > 1$ y que, por ser siempre $R \geq 2r$, también es $\lambda \leq \frac{3}{2}$.

Para una justificación de la fórmula (1) ver, por ejemplo, mi solución del Problema 435.