**Problema 589.**

Sea $ABC$ un conjunto de triángulos tales que el ángulo $A$ y su lado $c$ en cada uno de ellos son fijos. Denotamos por $m_a$, $s_a$, $g_a$, $n_a$ la mediana, simediana, ceviana Gergonne y ceviana Nagel que parten del vértice $A$ de cada uno de los mismos, respectivamente. Determinar el valor del siguiente límite cuando la longitud del lado $b$ tienda a la del lado $c$, es decir, cuando el triangulo $ABC$ tienda a ser isósceles:

$$\lim_{b\to c} \frac{m_a^2 - s_a^2}{n_a^2 - g_a^2}$$

*Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. "El Sur", Huelva.*

**Soluzione di Ercole Suppa**.

Per calcolare $m_a$, $s_a$, $g_a$, $n_a$ utilizziamo il seguente

TEOREMA DI STEWART. In un triangolo $ABC$, se la ceviana $AD$ ha lunghezza $p$ e divide il lato opposto in due parti di lunghezza $m$, $n$, sussiste la relazione:

$$a(p^2 + mn) = mb^2 + nc^2 \tag{1}$$

Dalla (1) si ricava:

$$p^2 = \frac{mb^2 + nc^2 - mna}{a} \tag{2}$$

Mediante la (2), con facili calcoli, abbiamo:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \tag{3}$$

$$s_a^2 = \frac{b^2c^2\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)}{\left(b^2 + c^2\right)^2} \tag{4}$$

$$g_a^2 = \frac{(b + c - a)\left(a^2 - 2b^2 - 2c^2 + ab + ac + 4bc\right)}{4a} \tag{5}$$

$$n_a^2 = \frac{(a + b + c)\left(2b^2 + 2c^2 - a^2 + ab + ac - 4bc\right)}{4a} \tag{6}$$

Dalle (3), (4) (5), (6) abbiamo:

$$\lim_{b\to c} \frac{m_a^2 - s_a^2}{n_a^2 - g_a^2} = \lim_{b\to c} \frac{a(b + c)\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)}{4\left(b^2 + c^2\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{c} - \frac{1}{8}\left(\frac{a}{c}\right)^3 \tag{7}$$

Se $b \to c$ si ha che $B \to C$ e quindi $A + 2C = 180°$. Pertanto, tenuto conto del teorema dei seni, abbiamo:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\sin\left(90° - \frac{A}{2}\right)} = 2\sin\frac{A}{2}$$

e quindi la (7) può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned}\lim_{b\to c}\frac{m_a^2-s_a^2}{n_a^2-g_a^2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{c}-\frac{1}{8}\left(\frac{a}{c}\right)^3=\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\right)-\frac{1}{8}\left(2\sin\frac{A}{2}\right)^3=\\ &= \sin\frac{A}{2}-\sin^3\frac{A}{2}=\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin^2\frac{A}{2}\right)=\\ &= \sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\sin A\cos\frac{A}{2}\end{aligned}\qquad\square$$